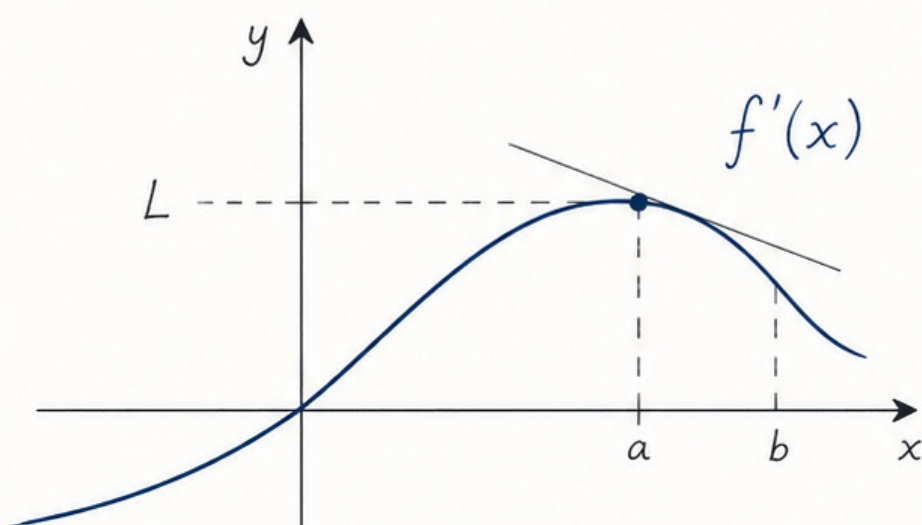


Skrypty pomocnicze do Analizy Matematycznej 1

Zrozum pojęcia, zobacz logikę wzorów
i uporządkuj materiał od podstaw do całek

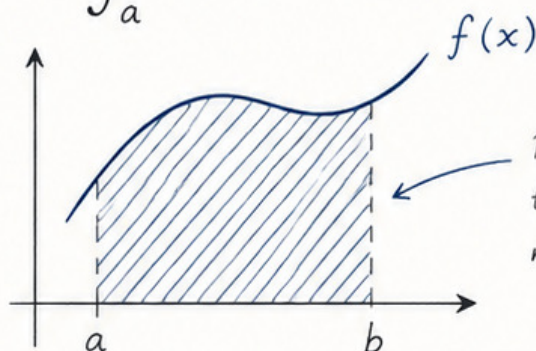


Pochodna mówi,
jak funkcja się zmienia.
Całka zbiera te zmiany
w całość.
Zrozum relacje –
nie tylko zapamiętuj wzory.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Granica opisuje, do czego
funkcja dąży.
To fundament ciągłości,
pochodnych i całek.

$$\int_a^b f(x) dx$$



Pole pod wykresem
to suma nieskończenie
małych części.

Informacje o materiale

Niniejszy materiał został przygotowany jako wsparcie edukacyjne do nauki i powtórek z Analizy Matematycznej 1.



Skrypty pomocnicze do Analizy Matematycznej 1

© Wszystkie prawa zastrzeżone.

Materiał przeznaczony jest wyłącznie do użytku osobistego nabywcy. Kopiowanie, udostępnianie, odsprzedaż, publikowanie lub rozpowszechnianie całości bądź fragmentów bez zgody właściciela praw jest zabronione.



Materiał ma charakter edukacyjny i stanowi pomoc w nauce. Nie gwarantuje uzyskania określonego wyniku egzaminu lub zaliczenia przedmiotu.

Jak korzystać ze skryptu

1. Najpierw przeczytaj wyjaśnienie pojęcia.
2. Następnie przeanalizuj przykład.
3. Spróbuj przewidzieć kolejny krok przed przeczytaniem rozwiązania.
4. Na końcu sprawdź sekcję „Zapamiętaj”.

Spis treści

Wprowadzenie	03
MODUŁ 01	Fundamenty, które trzeba rozumieć 04
	Co właściwie oznacza funkcja? 05
	Dziedzina, przeciwdziedzina i zbiór wartości 06
	Jak czytać wykres funkcji 07
	Funkcja odwrotna 08
	Potęgi, pierwiastki i logarytmy 09
	Trygonometria potrzebna w analizie 10
	Przekształcenia algebraiczne, które ratują rozwiązanie 11
	Mapa fundamentów 12
MODUŁ 02	Granice krok po kroku 13
	Idea granicy 14
	Granica funkcji w punkcie 15
	Granice jednostronne 16
	Granice w nieskończoności 17
	Wyrażenia nieoznaczone 18
	Rozkład i skracanie 19
	Usuwanie niewymierności 20
	Najważniejsze granice standardowe 21
	Jak wybrać metodę? 22
MODUŁ 03	Ciągłość i nieciągłości 23
	Co oznacza ciągłość? 24
	Formalny warunek ciągłości 25
	Nieciągłość usuwalna 26
	Nieciągłość skokowa 27
	Nieciągłość nieskończona 28
	Diagnostyka ciągłości 29
MODUŁ 04	Pochodne i ich sens 30
	Od zmiany do pochodnej 31
	Definicja pochodnej 32
	Interpretacja geometryczna 33
	Podstawowe wzory 34
	Reguła iloczynu i ilorazu 35
	Reguła łańcuchowa 36
	Monotoniczność i ekstrema 37
	Badanie funkcji 38
	Strategia rozwiązywania zadań z pochodnych 39
MODUŁ 05	Całki bez zgadywania 40
	Co oznacza całka? 41
	Funkcja pierwotna 42
	Podstawowe wzory całkowe 43
	Całkowanie przez podstawienie 44
	Całkowanie przez części 45
	Całka oznaczona 46
	Pole pod wykresem 47
	Jak wybrać metodę całkowania? 48
	Mapa Analizy Matematycznej 1 49

Analiza staje się prostsza, kiedy rozumiesz, co robisz

W Analizie Matematycznej problemem często nie jest sam wzór. Trudność pojawia się wcześniej: student nie wie, dlaczego można użyć właśnie tego wzoru, co oznaczają poszczególne symbole i od którego kroku zacząć.

Ten skrypt został zbudowany dokładnie po to, aby wypełnić tę lukę.

POJĘCIE → INTUICJA → WZÓR → PRZYKŁAD → SAMODZIELNA
DECYZJA



POJĘCIE — Co dokładnie oznacza termin matematyczny.



INTUICJA — Jak można go rozumieć bez formalnego języka.



WZÓR — Jak zapisujemy tę ideę matematycznie.



PRZYKŁAD — Jak używamy jej w konkretnym zadaniu.



SAMODZIELNA DECYZJA — Jak rozpoznać, kiedy wykorzystać daną metodę.



Nie ucz się tylko procedury

Jeżeli zapamiętasz wyłącznie kolejne kroki rozwiązania, niewielka zmiana w zadaniu może Cię zatrzymać.

Jeżeli rozumiesz ideę stojącą za metodą, znacznie łatwiej rozpoznasz właściwą drogę.

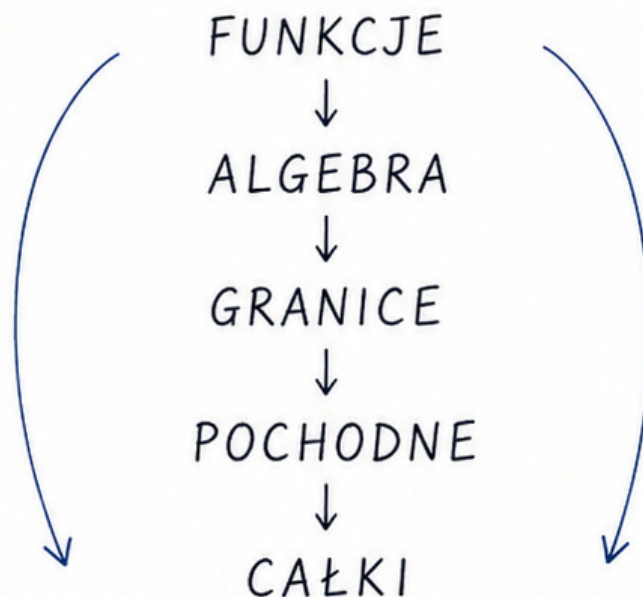
Zaczynamy od fundamentów, ponieważ właśnie tam powstaje większość problemów, które później wyglądają jak problemy z granicami, pochodnymi lub całkami.

MODUŁ 01

Fundamenty, które trzeba rozumieć

Funkcje, algebra, logarytmy i trygonometria
jako język całej analizy

Zanim zaczniesz liczyć granice i pochodne, musisz swobodnie rozpoznawać funkcje, ich dziedziny, przekształcenia algebraiczne oraz podstawowe własności potęg, logarytmów i funkcji trygonometrycznych.



Jeżeli fundament jest niepewny, każdy kolejny etap wymaga więcej pamięci i więcej zgadywania.

Funkcja to reguła przyporządkowania

Funkcja przyporządkowuje każdemu dopuszczalnemu argumentowi dokładnie jedną wartość.

$$f : X \rightarrow Y$$
$$x \mapsto f(x)$$

Co oznaczają symbole:

- X — zbiór argumentów
- Y — zbiór, do którego należą możliwe wyniki
- x — argument
- $f(x)$ — wartość funkcji dla argumentu x

Funkcja może być opisana:

- wzorem
- tabelą
- wykresem
- słownie
- diagramem przyporządkowania

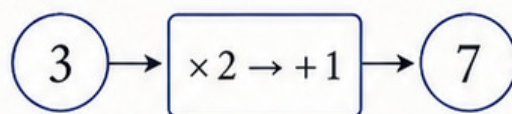
Przykład.

Niech $f(x) = 2x + 1$.

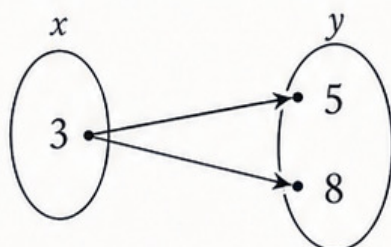
Dla $x = 3$ mamy:

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

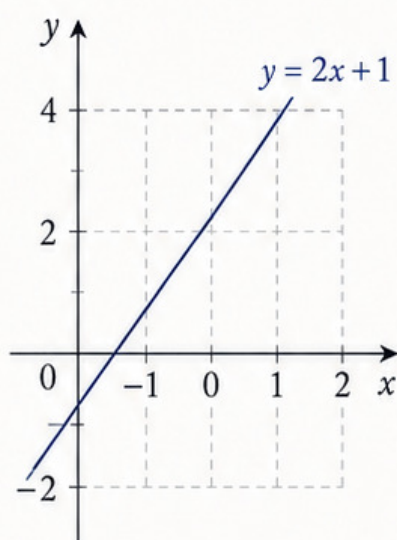
Liczba 3 wchodzi do reguły f ,
a wynikiem jest 7.



Relacja, która przyporządkowuje jednej wartości x dwie różne wartości y , nie jest funkcją $y = f(x)$.



Do 3 przyporządkowano
dwie różne wartości.
To nie jest funkcja.



Zapamiętaj

Jednemu argumentowi funkcja nie może przypisać dwóch różnych wartości.

Typowy błąd

Funkcja to zawsze równanie.

Równanie lub wzór jest tylko jednym ze sposobów opisanie funkcji.

Trzy zbiory, których nie wolno mylić

1. Dziedzina

Zbiór argumentów, dla których funkcja jest określona.

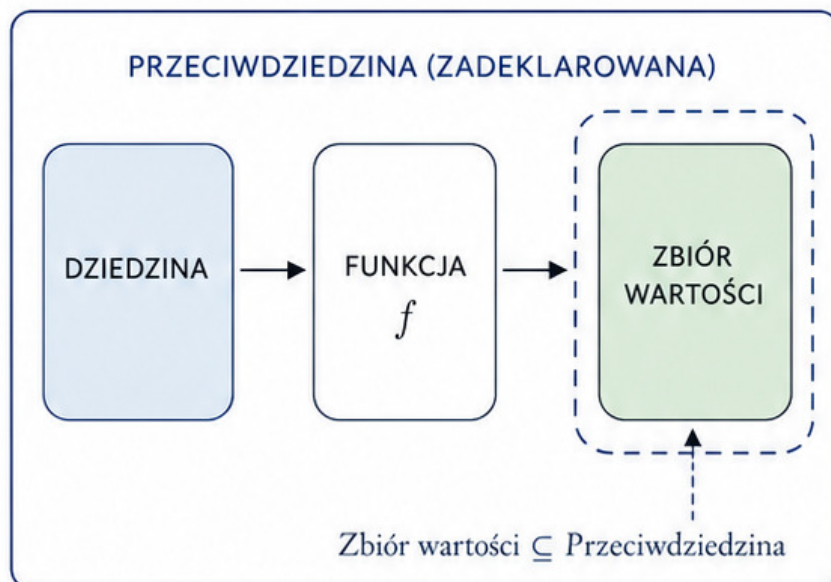
$$D_f$$

2. Przeciwdziedzina

Zbiór zadeklarowany przy definiowaniu funkcji jako zbiór możliwych wyników.

3. Zbiór wartości

Te elementy przeciwdziedziny, które funkcja rzeczywiście przyjmuje.



Przykład

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2$$

- Dziedzina: $\mathbb{R}$
- Przeciwdziedzina: $\mathbb{R}$
- Zbiór wartości: $[0, +\infty)$



Przeciwdziedzina i zbiór wartości nie muszą być tym samym.

Jak znajdować dziedzinę?

- 1 **Mianownik:** nie może być równy zero.

Przykład: $\frac{1}{x-2} \rightarrow x \neq 2$

- 2 **Pierwiastek parzystego stopnia:** wyrażenie pod pierwiastkiem musi być ≥ 0 .

Przykład: $\sqrt{x-3} \rightarrow x \geq 3$

- 3 **Logarytm:** argument logarytmu musi być dodatni.

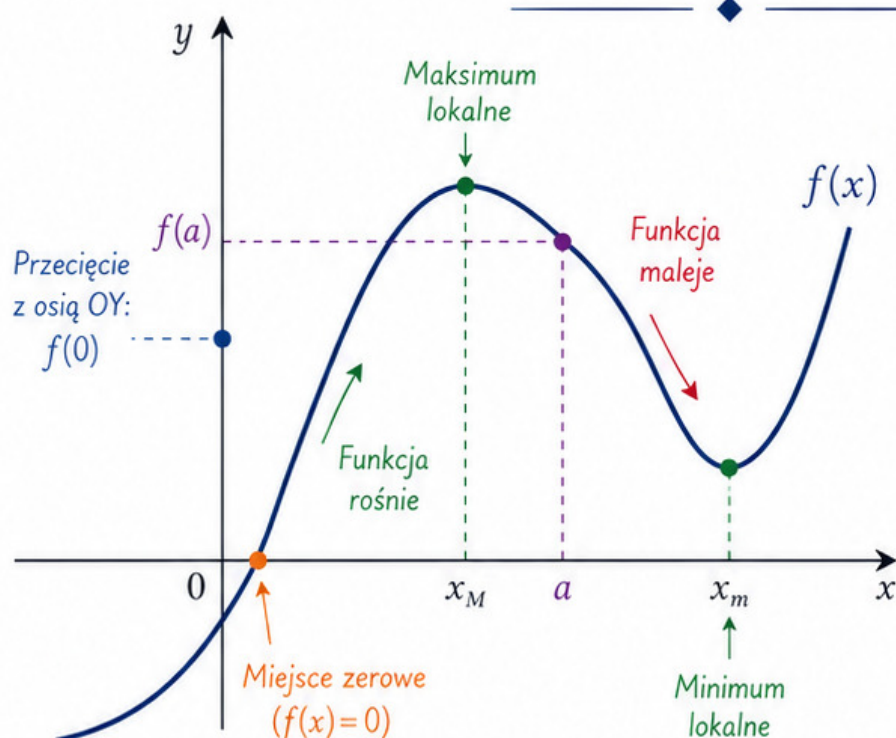
Przykład: $\ln(x+1) \rightarrow x > -1$



Szybka kontrola

Dla jakich wartości x to wyrażenie w ogóle ma sens?

Wykres to informacja, nie ozdoba



- ◆ **Miejsce zerowe** — argument x , dla którego $f(x) = 0$.
- ◆ **Monotoniczność** — informacja o tym, czy funkcja w danym przedziale rośnie, maleje lub pozostaje stała.
- ◆ **Ekstremum lokalne** — punkt, w którego otoczeniu funkcja przyjmuje szczególnie dużą lub szczególnie małą wartość.

1. Jaka jest wartość $f(a)$?

- Znajdź a na osi OX , przejdź pionowo do wykresu i odczytaj wysokość.

2. Gdzie $f(x) = 0$?

- Szukamy miejsc przecięcia wykresu z osią OX .

3. Gdzie funkcja jest dodatnia?

- Tam, gdzie wykres znajduje się nad osią OX .

4. Gdzie funkcja rośnie?

- Tam, gdzie wraz ze wzrostem x wartości funkcji rosną.

5. Gdzie funkcja maleje?

- Tam, gdzie wraz ze wzrostem x wartości funkcji maleją.

Po co Ci to później?



Granice opiszą zachowanie wykresu w pobliżu punktu.



Pochodne pozwolą matematycznie wykrywać jego wzrost, spadek i ekstrema.



Całki pozwolą mierzyć wielkości związane z obszarem pod wykresem.

Funkcja odwrotna cofa działanie funkcji

Jeśli funkcja f przekształca wartość wejściową x w wartość wyjściową y , to funkcja odwrotna f^{-1} pozwala wrócić od y z powrotem do x .

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ & \xleftarrow{f^{-1}} & \\ x & & y \end{array}$$



$f^{-1}(x)$ nie oznacza $1/f(x)$.

Przykład: znajdź funkcję odwrotną do $f(x) = 2x + 3$.

- 1 Zapisz funkcję: $y = 2x + 3$
- 2 Zamień role x i y : $x = 2y + 3$
- 3 Rozwiąż względem y :
$$x - 3 = 2y$$
$$y = \frac{x - 3}{2}$$

Wniosek: $f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{2}$

Sprawdzenie:

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

Podstawiamy $f^{-1}(x)$ do $f(x)$:

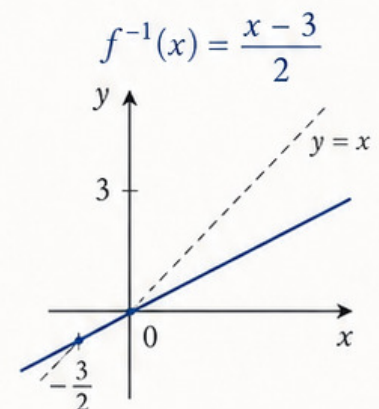
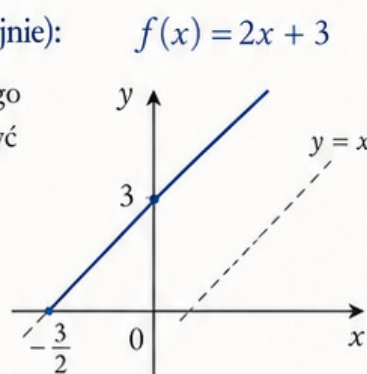
$$2 \left[\frac{x - 3}{2} \right] + 3 = x$$

Warunek istnienia funkcji odwrotnej (intuicyjnie):

Jeżeli dwie różne wartości x prowadzą do tego samego y , nie można jednoznacznie odtworzyć wartości wejściowej.

Mówimy wtedy, że funkcja *nie jest* różnowartościowa.

To intuicyjne pojęcie „różnowartościowości” wystarcza na tym etapie – bez formalizmu.



Zapamiętaj

Funkcja odwrotna odwraca przyporządkowanie, a nie wartość liczbową funkcji.

Reguły, które pojawiają się wszędzie

Zestaw najważniejszych własności algebraicznych,
które wykorzystamy później w granicach, pochodnych i całkach.

1 Potęgi

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = a^{mn}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
$2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$	$\frac{x^5}{x^2} = x^3$	$(x^2)^3 = x^6$	$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$	$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

2 Pierwiastki

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Pierwiastek kwadratowy oznacza wartość nieujemną,
dlatego dla dowolnego rzeczywistego x poprawnym wynikiem
jest $|x|$, a nie zawsze x .

3 Logarytmy

$\log_a b = c$ oznacza dokładnie: $a^c = b$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^k) = k \log_a x$$

Warunki:

- $a > 0$
- $a \neq 1$
- $x > 0$

Przykład:

$$\ln(e^3) = 3$$

$\ln$ to logarytm naturalny
o podstawie e .

Typowy błąd

$$\log(x+y) \neq \log x + \log y$$



Minićwiczenie kontrolne

Uprość: $\ln(e^2) + \ln(e^3)$

Odpowiedź: 5

Uzasadnienie: $\ln(e^2) = 2$, $\ln(e^3) = 3$
więc $2 + 3 = 5$.

Trygonometria bez nadmiaru: tylko to, czego naprawdę użyjesz

Nie traktuj trygonometrii jako osobnego rozdziału do zapamiętania.
To niewielki zestaw zależności, które stale wracają w analizie
– przy granicach, pochodnych i całkach.

1 Najważniejsze funkcje

$$\sin x$$

$$\cos x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

- $\sin x$ i $\cos x$ są określone dla wszystkich liczb rzeczywistych.
- $\tan x$ nie istnieje tam, gdzie $\cos x = 0$.

2 Tożsamość podstawowa

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Dzięki niej możemy zamieniać wyrażenia z $\sin^2 x$ na $\cos^2 x$ i odwrotnie.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

3 Najważniejsze wartości

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	1	0

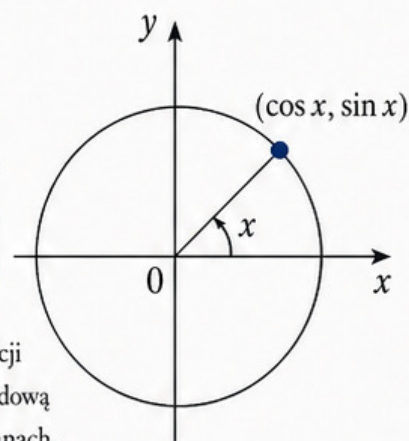
4 Radiany

Radian to naturalna jednostka kąta używana w analizie matematycznej.

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

Ważna uwaga: wzory na pochodne funkcji trygonometrycznych mają swoją standardową postać wtedy, gdy kąt mierzymy w radianach.



Zapamiętaj

Nie musisz pamiętać całej trygonometrii.

W Analizie Matematycznej 1 najważniejsze są:

podstawowe wartości, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, zależność $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ oraz rozumienie radianów.

Czasem problem nie jest z analizą. Problem jest z algebrą.

Kilka prostych przekształceń algebraicznych bardzo często decyduje o tym, czy zadanie z granicy, pochodnej lub całki da się rozwiązać czysto i elegancko.

1 Wylączanie wspólnego czynnika

$$x^2 - 3x = x(x - 3)$$

- Wylączanie wspólnego czynnika pozwala wydobyć strukturę ukrytą w zapisie rozwiniętym.

2 Wzory skróconego mnożenia

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= \\ &= (a - b)(a + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

- Przykład praktyczny:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ dla } x \neq 2 = x + 2$$

- To przekształcenie będzie kluczowe przy granicach.

3 Wspólny mianownik

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{(x+1) - x}{x(x+1)}$$

$$= \frac{1}{x(x+1)}$$

4 Racjonalizacja

- Przykład: $\sqrt{x} - 2$
- Mnożymy przez wyrażenie sprzężone: $\sqrt{x} + 2$.

Wyrażenie sprzężone różni się znakiem między składnikami.

- Korzystamy z tożsamości: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
- Pozwala to usunąć uciążliwy pierwiastek z licznika lub mianownika.



Najważniejsze pytanie
przed trudnym zadaniem

Czy mogę najpierw
uproszczyć wyrażenie?

Próba zastosowania zaawansowanej metody przed uproszczeniem często prowadzi do niepotrzebnego skomplikowania zadania.

ZŁOŻONE WYRAŻENIE

ROZKŁAD /
SKRACANIE /
WSPÓLNY MIANOWNIK /
SPRZĘŻENIE

PROSTSZA STRUKTURA

WŁAŚCIWA METODA



Zapamiętaj

Dobre przekształcenia algebraiczne to skróty myślowe.
Ułatwiają dalszą analizę i prowadzą do właściwego rozwiązania.

Co musisz umieć, zanim przejdziesz dalej?

Mapa kontrolna na koniec Modułu 01.
Upewnij się, że opanowałeś podstawy.

1 FUNKCJE

- wyjaśnić własnymi słowami, czym jest funkcja
- odróżnić argument od wartości funkcji
- określić podstawową dziedzinę
- odczytać informację z wykresu

2 ALGEBRA

- rozkładać różnicę kwadratów
- wyłączać wspólny czynnik
- sprowadzać ułamki do wspólnego mianownika
- korzystać z wyrażenia sprzężonego

3 POTĘGI I LOGARYTMY

Wyświetlać i rozpoznawać:

- $a^m \cdot a^n$
- a^{-n}
- $\sqrt{x^2}$
- $\ln(e^x)$
- warunek: argument logarytmu > 0

4 TRYGONOMETRIA

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- znać podstawowe wartości funkcji $\sin x$ i $\cos x$



Sprawdź się

- 1 Jaka jest dziedzina $f(x) = \frac{1}{x-4}$?
- 2 Uprość $x^2 - 9$.
- 3 Czy $\sqrt{x^2} = x$ dla każdego x ?
- 4 Ile wynosi $\ln(e^5)$?
- 5 Ile wynosi $\sin^2 x + \cos^2 x$?



Odpowiedzi

- 1 $\mathbb{R} \setminus \{4\}$
- 2 $(x-3)(x+3)$
- 3 Nie, $\sqrt{x^2} = |x|$
- 4 5
- 5 1



Jeśli te pięć pytań nie sprawia Ci trudności,
możesz spokojnie przejść do granic.



MODUŁ 02

Granice krok po kroku

Jak opisywać zachowanie funkcji,
nawet wtedy, gdy bezpośrednie podstawienie nie wystarcza

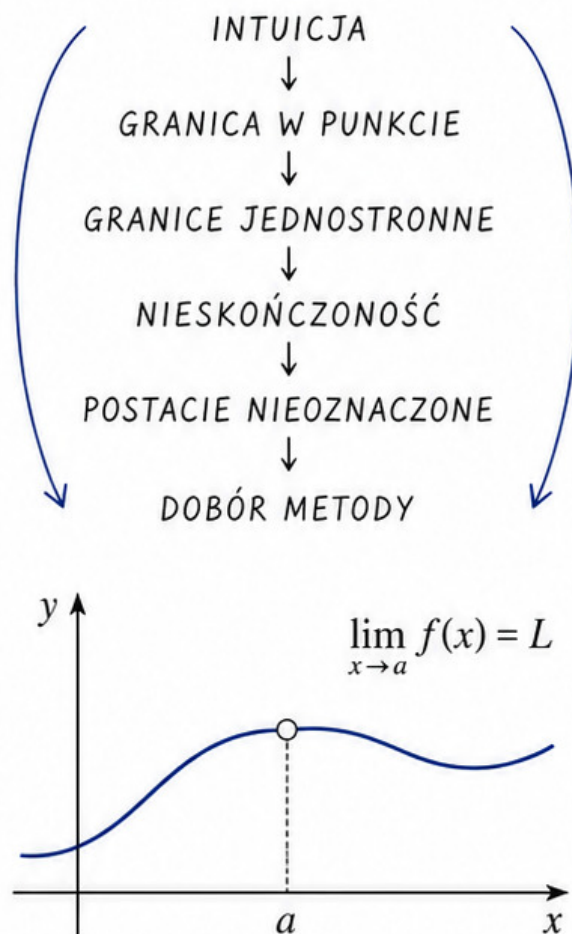
W tym module nauczysz się interpretować granicę jako opis zachowania funkcji, rozpoznawać podstawowe rodzaje granic oraz dobierać odpowiednią strategię obliczeń do danej sytuacji.

Granica nie pyta przede wszystkim:

Ile wynosi funkcja
dokładnie w tym punkcie?

Pyta:

Do jakiej wartości zbliża się
funkcja, kiedy argument
zbliża się do danego punktu?



Nie patrzymy tylko na punkt.
Patrzymy na zachowanie funkcji wokół niego.

Granica opisuje kierunek, do którego zmierza funkcja

Granica pozwala opisać zachowanie funkcji blisko pewnego punktu, nawet wtedy, gdy funkcja nie jest w tym punkcie określona. Sprawdźmy to na konkretnym przykładzie.

Przykład

Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Dla $x = 1$ bezpośrednie podstawienie daje $\frac{0}{0}$, wyrażenie nie jest określone.

Dla $x \neq 1$ mamy

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1),$$

$$\text{zatem } f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$$

dla $x \neq 1$.

Wartości funkcji blisko $x = 1$

x	$f(x)$
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
1,001	2,001
1,01	2,01
1,1	2,1

Do czego zbliżają się wartości funkcji?

2

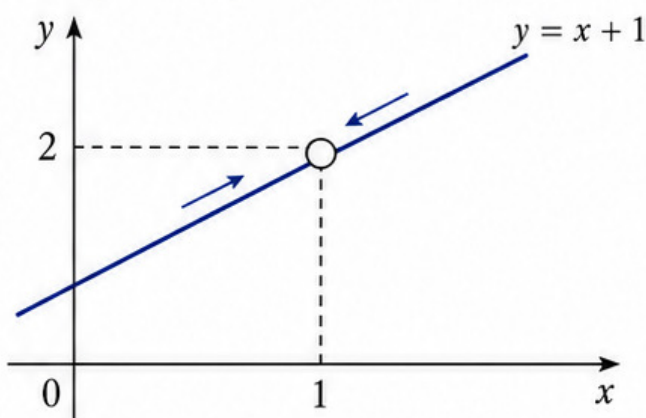
Zapis granicy

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Znaczenie symboli

- $\lim$ — granica
- $x \rightarrow 1$ — argument zbliża się do 1
- 2 — wartość, do której zbliżają się wartości funkcji

Interpretacja graficzna



Kluczowa idea: Granica może istnieć, nawet jeśli funkcja nie jest w punkcie określona lub ma w nim inną wartość.



Zapamiętaj

Wartość funkcji w punkcie i granica funkcji w tym punkcie to dwa różne pytania.

Najpierw sprawdź najprostszą rzecz: podstawienie



Jeżeli po bezpośrednim podstawieniu otrzymasz zwykłą liczbę,
to zwykle jest to wartość granicy.

1 Przykład 1

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 1)$$

Podstawiamy bezpośrednio:

$$2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 1) = 9$$

Wielomiany są ciągle
dla wszystkich liczb
rzeczywistych,
więc podstawienie
działa zawsze.

2 Przykład 2

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+4}$$

Podstawiamy bezpośrednio:

$$\frac{1+2}{1+4} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+4} = \frac{3}{5}$$

Mianownik po
podstawieniu
nie jest zerem
($1+4 \neq 0$),
więc nie ma
problemu.

3 Przykład 3

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Podstawiamy bezpośrednio:

$$\frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

Otrzymaliśmy
postać nieoznaczoną.
To **nie jest** wynik!

PROCEDURA POSTĘPOWANIA

1. PODSTAW

2. Czy otrzymałeś
zwykłą liczbę?

TAK
zakończ

NIE
rozpoznaj problem
i wybierz metodę



$\frac{0}{0}$ nie jest wynikiem granicy.
To sygnał: muszę przekształcić
wyrażenie.



Typowy błąd

Zobaczyć $\frac{0}{0}$ i napisać „granica nie istnieje”.

To **błędne!**

$\frac{0}{0}$ to postać nieoznaczona, a nie automatyczny
dowód, że granica nie istnieje.

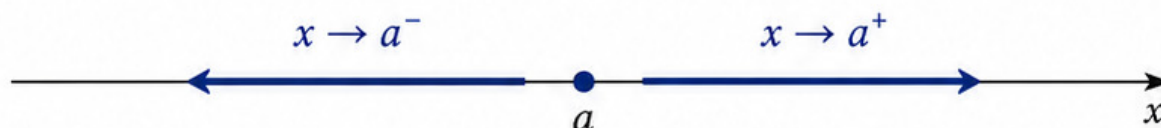


Mini zadanie – sprawdź sam!

Oblicz: $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - x + 1)$

Odpowiedź: 16

Do punktu można zbliżać się z dwóch stron



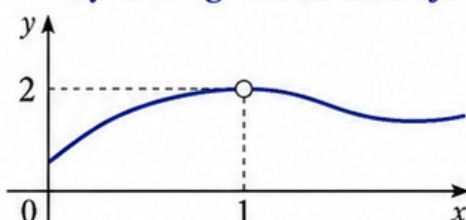
• **Granica lewostronna:** $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ — patrzymy na wartości x mniejsze od a , które coraz bardziej zbliżają się do a .

• **Granica prawostronna:** $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ — patrzymy na wartości x większe od a , które coraz bardziej zbliżają się do a .



$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ istnieje wtedy, gdy $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

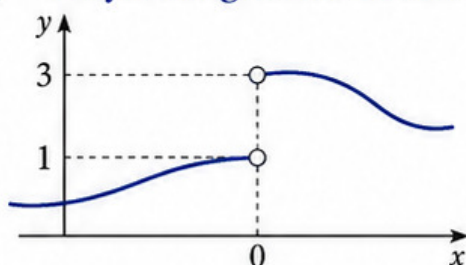
1 Przykład: granica istnieje



$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

2 Przykład: granica obustronna nie istnieje



$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 \neq 3$$

**granica obustronna
nie istnieje**



Zapamiętaj

Aby istniała granica w punkcie, obie strony muszą spotkać się na tej samej wysokości.



Ważne

Wartość $f(a)$ nie decyduje sama w sobie o istnieniu granicy.

Co dzieje się z funkcją, gdy x rośnie bez końca?

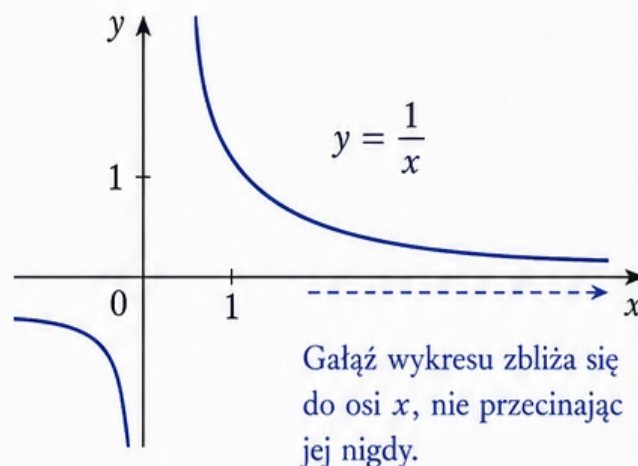
Zapis $x \rightarrow \infty$ nie oznacza, że x dochodzi do liczby ∞ (bo taka liczba nie istnieje). Oznacza to, że badamy zachowanie funkcji dla coraz większych wartości x . Analogicznie, $x \rightarrow -\infty$ dotyczy coraz bardziej ujemnych argumentów.

1 Przykład 1: $f(x) = \frac{1}{x}$

x	$\frac{1}{x}$
10	0,1
100	0,01
1000	0,001

Gdy x rośnie, wartości $\frac{1}{x}$ są coraz bliższe zera.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$



Gałąź wykresu zbliża się do osi x , nie przecinając jej nigdy.

Asymptota pozioma

To prosta, do której wykres funkcji zbliża się, gdy argumenty rosną (bardzo dodatnie lub bardzo ujemne).

Dla funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ asymptotą poziomą jest prosta $y = 0$.

2 Przykład 2: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{x^2 - 1}$

Dla bardzo dużych x największy wpływ mają składniki najwyższego stopnia. Mamy $3x^2 + 2 \approx 3x^2$ oraz $x^2 - 1 \approx x^2$.

Zatem ułamek zachowuje się jak $\frac{3x^2}{x^2} = 3$, więc granica równa się 3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{x^2 - 1} = 3$$

Dominujące potęgi

Dla funkcji wymiernej $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ przy $x \rightarrow \infty$:

- Gdy stopień $P(x)$ jest mniejszy niż stopień $Q(x)$ — często $\lim f(x) = 0$.
- Gdy stopnie $P(x)$ i $Q(x)$ są równe — granica jest równa ilorazowi współczynników przy najwyższych potęgach.
- Gdy stopień $P(x)$ jest większy niż stopień $Q(x)$ — funkcja może rosnąć bez ograniczeń (granica może być ∞ lub $-\infty$).



Zapamiętaj

Przy $x \rightarrow \infty$ zwykle najważniejsze są te składniki, które rosną najszybciej.

Postać nieoznaczona nie jest odpowiedzią



Postać nieoznaczona to wynik pośredni, który nie pozwala jeszcze określić granicy. Oznacza: trzeba wykonać dalszą analizę.

Najważniejsza postać na tym etapie

$$\frac{0}{0}$$

A $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x}$

Dla $x \neq 0$:

$$\frac{x}{x} = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

B $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$

Dla $x \neq 0$:

$$\frac{x^2}{x} = x$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

C $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2}$

Dla $x \neq 0$:

$$\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

- Gdy $x \rightarrow 0^+$, to $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$.
- Gdy $x \rightarrow 0^-$, to $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$.



**Brak wspólnej granicy
(wartości skończonej)**



W każdym z trzech przykładów podstawienie prowadzi do $0/0$, ale wynik jest zupełnie inny. Dlatego $0/0$ nie określa granicy.

Pozostałe postacie nieoznaczone

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

$$1^\infty$$

$$0^0$$

$$\infty^0$$



Zwróć uwagę

Na poziomie Analizy Matematycznej 1 metoda zależy od rodzaju funkcji oraz narzędzi poznanych na kursie.



Czy otrzymałem wynik, czy tylko sygnał, że muszę przekształcić wyrażenie?

Gdy pojawia się 0/0, poszukaj ukrytego wspólnego czynnika

Gdy w granicy otrzymujemy postać 0/0, często oznacza to,
że licznik i mianownik mają wspólny czynnik.
Rozłóż na czynniki, skróć ten czynnik i dopiero wtedy oblicz granicę.

Przykład główny:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

1 Krok 1 — podstawienie

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

To postać
nieoznaczona.
Nie kończymy
zadania.

2 Krok 2 — rozłóż licznik

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ x^2 - 4 &= (x - 2)(x + 2) \end{aligned}$$

3 Krok 3 — zapisz ponownie

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$$

4 Krok 4 — skróć wspólny czynnik

Dla $x \neq 2$ czynnik $(x - 2)$ skraca się,
zostaje:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)$$

Skracamy tylko
w pobliżu 2,
ale dla $x \neq 2$.

5 Krok 5 — oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$



Odpowiedź:

4



Przykład do samodzielnej praktyki

Oblicz granicę:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Wskazówka:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

Odpowiedź:

6



Bardzo ważne!

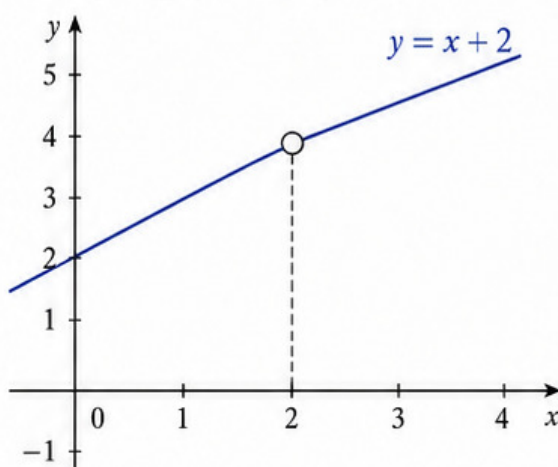
Nie skracamy zera.

Skracamy czynnik $x - 2$ dla argumentów
w pobliżu liczby 2, ale różnych od 2.

Idea graficzna

Prosta $y = x + 2$ jest wykresem funkcji $f(x) = x + 2$.

Wyrażenie $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ daje ten sam wykres,
ale bez jednego punktu przy $x = 2$.



Poza punktem $x = 2$ obie opisy (prosta $y = x + 2$
i wyrażenie $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$) dają te same wartości.

Schemat działania



1. rozłóż na czynniki
2. poszukaj wspólnego czynnika
3. skróć
4. dopiero wtedy ponownie podstaw.

Gdy przeszkadza pierwiastek, użyj wyrażenia sprzężonego

W granicach często pojawia się różnica zawierająca pierwiastek.
Wyrażenie sprzężone pomaga pozbyć się pierwiastka z licznika lub mianownika.

1 Krok 1 — podstawienie

$$\frac{\sqrt{4} - 2}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

To postać nieoznaczona.
Nie kończymy zadania.



Racjonalizacja nie jest trikiem.
Jej celem jest przekształcenie różnicy z pierwiastkiem w zwykłe wyrażenie algebraiczne.

2 Krok 2 — rozpoznaj strukturę

W liczniku mamy $\sqrt{x} - 2$.
Wyrażeniem sprzężonym jest $\sqrt{x} + 2$.

3 Krok 3 — pomnóż licznik i mianownik przez wyrażenie sprzężone

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}$$

4 Krok 4 — użyj różnicy kwadratów

$$\frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2) = x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

5 Krok 5 — skróć wspólny czynnik

$$\text{Dla } x \neq 4: \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

6 Krok 6 — podstaw ponownie

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$



Odpowiedź:

$$\frac{1}{4}$$

Kluczowe tożsamości

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2) = x - 4$$



Przykład do samodzielnej praktyki

Oblicz: $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

Odpowiedź: $\frac{1}{6}$



Jak rozpoznać tę metodę?

Zastosuj wyrażenie sprzężone, jeśli:

- po podstawieniu otrzymujesz postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ oraz
- w liczniku lub mianowniku występuje różnica zawierająca pierwiastek.

Wtedy sprawdź wyrażenie sprzężone i pomnóż licznik oraz mianownik przez nie.



Bardzo ważne!

Wyrażenie sprzężone zawsze ma postać z tym samym pierwszym składnikiem, ale ze zmienionym znakiem przy drugim składniku.

Kilka granic, które warto rozpoznawać od razu

Te granice pojawiają się bardzo często. Rozpoznanie wzorca pozwala szybko doprowadzić obliczenia do wyniku.

1 Granica trygonometryczna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- kąt x musi być mierzony w radianach.
- intuicja: dla bardzo małych x mamy $\sin x \approx x$.

Wariant użyteczny:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$$

Dlaczego? Przekształcamy:

$$\frac{\sin(ax)}{x} = a \cdot \frac{\sin(ax)}{ax} \xrightarrow{x \rightarrow 0} a \cdot 1 = a$$

Przykład: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$

2 Granica związana z funkcją wykładniczą

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

- pojawia się naturalnie przy badaniu funkcji e^x .
- w dalszej części kursu łączy się bezpośrednio z pochodną funkcji e^x .

3 Granica logarytmiczna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

- dla małych x mamy $\ln(1+x) \approx x$.
- często występuje przy uproszczeniach wyrażeń logarytmicznych.

4 Wzorec prowadzący do liczby e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

- wzorec definiujący liczbę e .
- przy bardzo dużym wykładniku lub mianowniku otrzymujemy liczbę e .



Nie stosuj wzoru na siłę

Wzorec granicy działa tylko wtedy, gdy wyrażenie można przekształcić do odpowiedniej postaci. Zawsze najpierw uprość i doprowadź do wzorca.

Przykład rozpoznania wzorca

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{2x} = \frac{5}{2} \cdot \underbrace{\frac{\sin(5x)}{5x}}_{\text{wzorec: } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}$$

TRYGONOMETRIA



→ 1

WYKŁADNICZA

e^x

→ 1

LOGARYTM

$\ln(1+x)$

→ 1

WZORZEC e

e

→ e



Zapamiętaj

Te cztery wzorce są fundamentem wielu uproszczeń granicznych. Rozpoznaj – przekształć – zastosuj. To kluczowa umiejętność w analizie matematycznej.

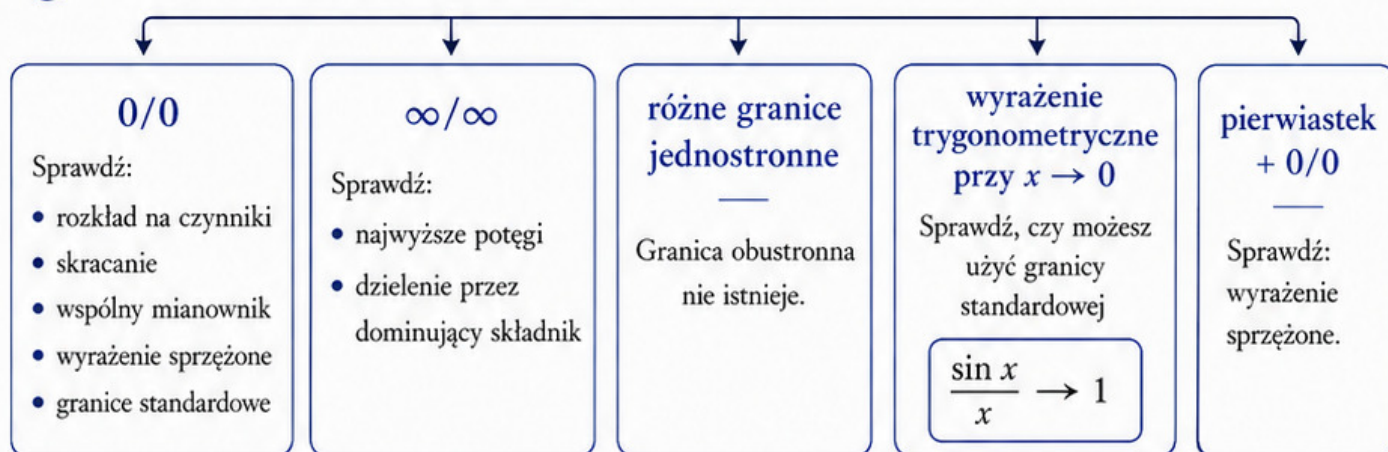
Granice: najpierw diagnoza, potem obliczenia

Algorytm wyboru metody obliczania granicy.

1 KROK 1 — PODSTAW



2 KROK 2 — CO OTRZYMAŁEŚ?



TRZY SZYBKE PRZYKŁADY DIAGNOSTYCZNE

A $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)$

Podstawienie: $2^2 + 1 = 5$

Wynik: 5
Metoda: bezpośrednie podstawienie

B $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

Podstawienie: $\frac{9 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$

Wynik: nieokreślony (0/0)
Metoda: rozkład i skracanie

C $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

Podstawienie: $\frac{\sqrt{1+0} - 1}{0} = \frac{0}{0}$

Wynik: nieokreślony (0/0)
Metoda: wyrażenie sprzężone



Najważniejsza umiejętność

To nie jest zapamiętywanie jak największej liczby sztuczek.

To rozpoznanie: „Jaki problem strukturalny widzę w tym wyrażeniu?”



ZAPAMIĘTAJ — mini-checklista

- | | |
|---|--|
| ☒ Rozumiem, czym granica różni się od wartości funkcji. | ☒ Wiem, kiedy rozkładać na czynniki i skracać. |
| ☒ Wiem, kiedy potrzebne są granice jednostronne. | ☒ Wiem, kiedy zastosować wyrażenie sprzężone. |
| ☒ Wiem, co oznacza postać 0/0 oraz ∞/∞ . | ☒ Wiem, kiedy rozpoznać granice standardowe. |

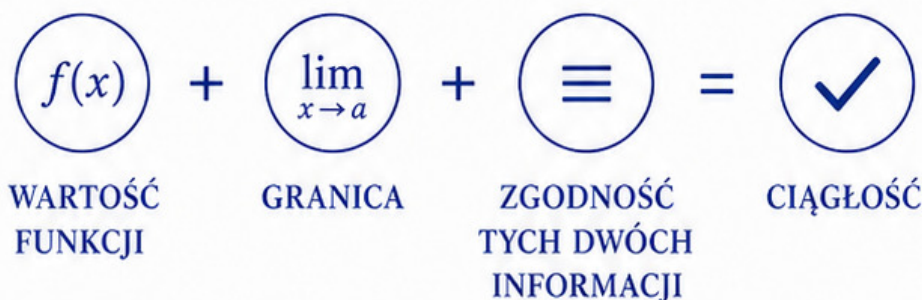
MODUŁ 03

Ciągłość i nieciągłości

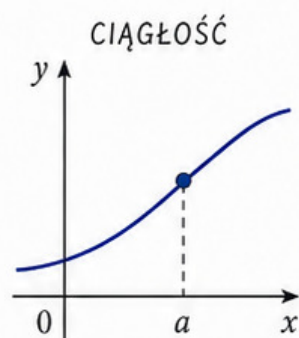
Kiedy wykres można prowadzić bez „przerwania”
i co dokładnie oznacza to matematycznie

Intuicyjnie funkcja ciągła wygląda tak, jakby można było narysować jej wykres bez odrywania ołówka od kartki. Ale w analizie matematycznej potrzebujemy bardziej precyzyjnego kryterium.

MAPA MODUŁU



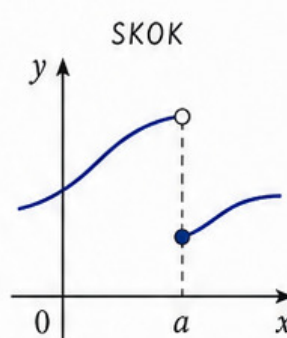
CO MOŻE SIĘ ZDARZYĆ?



Wartość funkcji i granica w punkcie a są sobie równe.



Granica istnieje, ale wartość funkcji w punkcie a jest inna lub funkcja nie jest określona.



Granice jednostronne istnieją, ale są różne.



Ciągłość nie oznacza tylko „ładnego wykresu”.
Jest precyzyjną zgodnością między wartością funkcji a jej granicą.

Ciągłość: brak niespodziewanej zmiany w punkcie

Zanim poznamy ściśle kryterium, zbudujmy intuicję.

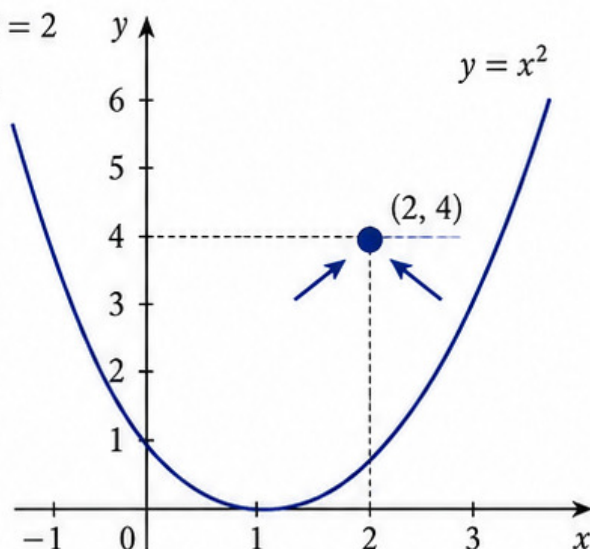
Jeśli x zmienia się tylko trochę, a wartości $f(x)$ również zmieniają się w przewidywalny sposób, mamy intuicyjny obraz ciągłości.

1 Przykład funkcji ciągłej: $f(x) = x^2$ w punkcie $x = 2$

Im bardziej x zbliża się do 2, tym bardziej $f(x)$ zbliża się do 4, dokładnie wartości $f(2)$.

x	$f(x) = x^2$
1,9	3,61
1,99	3,9601
2	4
2,01	4,0401
2,1	4,41

Gdy $x \rightarrow 2$,
 $f(x) \rightarrow 4$,
a $f(2) = 4$.

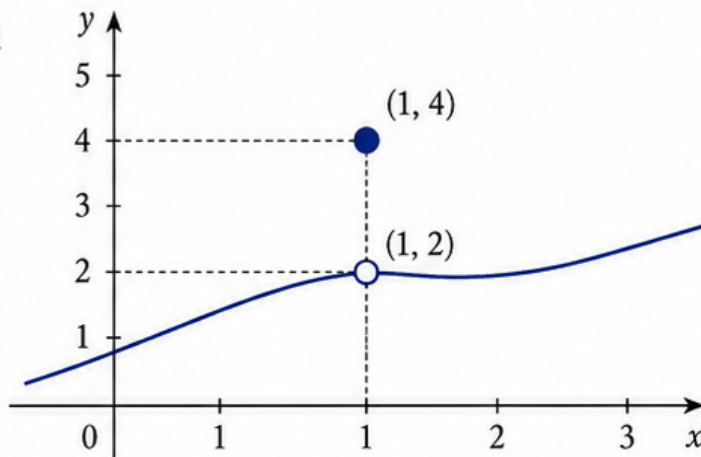


2 Przykład braku ciągłości w punkcie $x = 1$

Gdy x zbliża się do 1, wartości funkcji dążą do 2 (zachowanie wykresu wskazuje na 2), ale wartość funkcji w punkcie wynosi 4. Zgodność jest przerwana.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ (wartość, do której dążą wartości)
 $f(1) = 4$ (wartość funkcji w punkcie)

Zatem $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$.



Trzy pytania

- 1 Czy $f(a)$ istnieje?
- 2 Czy $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ istnieje?
- 3 Czy te dwie wartości są równe?



Zapamiętaj

Ciągłość w punkcie to brak niespodziewanej zmiany. Wartości funkcji „dochodzą” do tej samej wartości, którą funkcja ma w punkcie.



Na następnej stronie te trzy pytania staną się formalnym kryterium ciągłości.

Trzy warunki ciągłości w punkcie

Funkcja f jest ciągła w punkcie a , jeśli spełnione są jednocześnie trzy warunki.

1 WARUNEK 1

$f(a)$ istnieje.

Funkcja musi być określona w punkcie a , czyli ma w tym punkcie wartość.

2 WARUNEK 2

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ istnieje.

Granica lewostronna i prawostronna istnieją i są równe:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

3 WARUNEK 3

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Granica funkcji w punkcie a jest równa wartości funkcji w tym punkcie.

Zapis zwarte kryterium ciągłości w punkcie a :

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

To wyrażenie stanowi warunek ciągłości funkcji w punkcie a , gdy obie strony istnieją.

PRZYKŁAD 1 — funkcja ciągła

Rozważmy $f(x) = x^2 + 1$. Sprawdźmy ciągłość w $x = 2$.

1 Wartość w punkcie:

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

2 Granica w punkcie:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$$

3 Porównanie:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5 = f(2)$$



Wniosek: funkcja $f(x) = x^2 + 1$ jest ciągła w punkcie $x = 2$.

PRZYKŁAD 2 — funkcja nieciągła

Rozważmy funkcję:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dla } x \neq 2 \\ 7, & \text{dla } x = 2 \end{cases}$$

1 Wartość w punkcie:

$$f(2) = 7$$

2 Granica w punkcie:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 2 + 1 = 3$$

3 Porównanie:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \neq 7 = f(2)$$



Wniosek: funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x = 2$.

SZYBKA KONTROLA CIĄGŁOŚCI W PUNKCIE a



WARTOŚĆ ISTNIEJE
 $f(a)$ istnieje

+



GRANICA ISTNIEJE
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ istnieje

+



SĄ RÓWNE
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$\rightarrow$

CIĄGŁA
w punkcie a



Dopiero spełnienie wszystkich trzech warunków gwarantuje ciągłość w punkcie.



Typowy błąd

Samo istnienie granicy nie wystarcza do ciągłości!

Funkcja może mieć granicę w punkcie a , ale jeśli $f(a)$ nie istnieje albo $f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, to funkcja nie jest ciągła w tym punkcie.

Dziura, którą można naprawić jedną wartością

Dziura to przerwa w wykresie, którą da się usunąć, jeśli przypiszemy funkcji odpowiednią wartość w danym punkcie.

Przykład 1 Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ dla $x \neq 1$.

Krok 1 – uproszczenie

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \text{ dla } x \neq 1.$$

Krok 2 – granica w punkcie $x = 1$

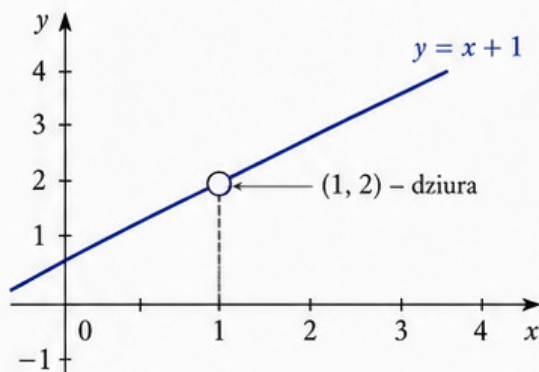
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

Krok 3 – co się dzieje na wykresie?

Dla wszystkich x bliskich 1 (ale różnych od 1) wartości funkcji są bliskie 2 z obu stron.

Problemem jest tylko to, że w punkcie $x = 1$ brak „poprawnej” wartości funkcji.

Wykres funkcji $f(x) = x + 1$ dla $x \neq 1$



Istnieją granice jednostronne i są równe:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$\text{Zatem } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

Krok 4 – naprawiamy dziurę

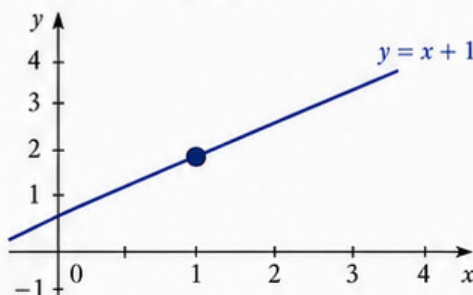
Jeśli zdefiniujemy $f(1) = 2$, otrzymujemy funkcję

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

czyli równoważnie: $g(x) = x + 1$ dla każdego x .

Wykres nie ma już przerwy.

Wykres funkcji $g(x) = x + 1$ (ciągła)



Wniosek

Dziurę można usunąć jedną wartością – tutaj przypisujemy tę wartość równą granicy.



Definicja. Punkt a jest usuwalną nieciągłością funkcji f , jeśli $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ istnieje (jest skończona), ale $f(a)$ nie jest równe tej granicy – albo $f(a)$ nie jest określone, albo $f(a)$ ma inną wartość.

Przykład 2 Załóżmy, że $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$, ale $f(3) = 8$.

Mamy dziurę (błąd wartości).

Aby usunąć nieciągłość, wystarczy zmienić definicję w punkcie 3 na $f(3) = 5$.



Jak ją rozpoznać?

- granica lewostronna jest równa granicy prawostronnej:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

- granica ta jest skończona
- wartość funkcji w punkcie a nie jest równa L (albo funkcja nie jest tam określona).



To jedyny typ nieciągłości, który można naprawić jedną wartością.

Jeśli istnieje granica w punkcie a , sprawdź, czy $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Jeśli nie – możesz usunąć dziurę, przypisując funkcji wartość równą granicy.

Gdy lewa i prawa strona dochodzą do różnych wartości

Gdy granice jednostronne w danym punkcie istnieją, ale są różne, funkcja ma w tym punkcie nieciągłość skokową.

1 Przykład – nieciągłość skokowa

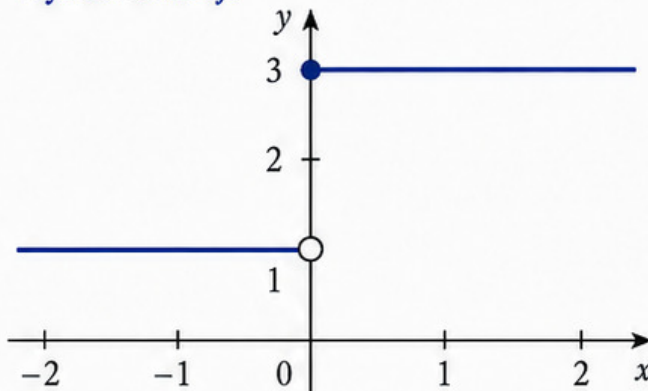
Rozważmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < 0 \\ 3 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

Interpretacja:

po lewej stronie od zera funkcja ma wartość 1, a po prawej – wartość 3.

Wykres funkcji



Granica lewostronna

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

Gdy x zbliża się do 0 z lewej strony, $f(x)$ dąży do 1.

Granica prawostronna

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$$

Gdy x zbliża się do 0 z prawej strony, $f(x)$ dąży do 3.

Czy istnieje granica dwustronna w 0?

Ponieważ $1 \neq 3$, to

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ nie istnieje.}$$

Wniosek

W punkcie $x = 0$ funkcja ma **nieciągłość skokową**.

Skąd nazwa „skokowa”?

Wartości funkcji „skaczą” nagle z jednego poziomu na drugi – z 1 na 3.

2 Porównanie typów nieciągłości

Typ	Lewa granica	Prawa granica	Można naprawić jedną wartością?
Usuwalna	taka sama	taka sama	Tak
Skokowa	różna	różna	Nie



Zapamiętaj

Zmiana wartości funkcji w jednym punkcie nie naprawi nieciągłości skokowej. Problem nie dotyczy samego punktu, lecz zachowania całych fragmentów wykresu po obu stronach punktu.

Gdy wartości funkcji uciekają bez ograniczeń

Niektóre funkcje w pobliżu pewnych punktów nie zbliżają się do żadnej skończonej liczby – ich wartości rosną lub maleją bez ograniczeń. Mówimy wtedy o nieciągłości nieskończonej i asymptocie pionowej.

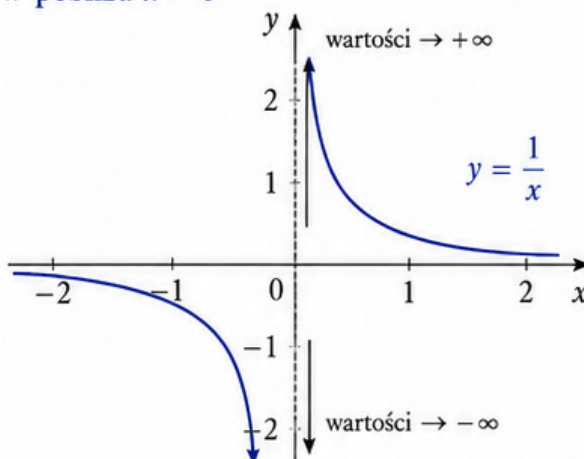
1 Przykład 1: $f(x) = \frac{1}{x}$ w pobliżu $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Gdy x dąży do 0 od prawej, wartości funkcji rosną bez ograniczeń.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Gdy x dąży do 0 od lewej, wartości funkcji maleją bez ograniczeń.



Asymptota pionowa

Prosta $x = a$ nazywa się **asymptotą pionową** wykresu funkcji f , jeśli

- gdy $x \rightarrow a^+$ lub $x \rightarrow a^-$, wartości $f(x)$ rosną bez ograniczeń do $+\infty$ lub maleją bez ograniczeń do $-\infty$.



Nieciągłość nieskończona w punkcie a występuje wtedy, gdy funkcja nie zbliża się do żadnej skończonej liczby w pobliżu a , tyle że jej wartości stają się dowolnie duże dodatnie lub ujemne.



Bardzo ważne!

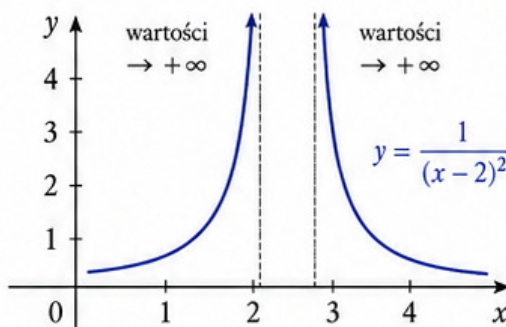
∞ nie jest zwykłą liczbą rzeczywistą. Zapis $f(x) \rightarrow \infty$ opisuje zachowanie funkcji, a nie wartość argumentu.

2 Przykład 2: $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ w pobliżu $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

Z obu stron wartości funkcji rosną bez ograniczeń do $+\infty$.



Gdzie szukać asymptoty pionowej?

Dla funkcji wymiernych $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (w najprostszej postaci):

1. znajdź miejsca zerowe mianownika $q(x) = 0$,
2. sprawdź, czy licznik $p(x)$ nie zeruje się w tych punktach,
3. jeśli $q(a) = 0$ oraz $p(a) \neq 0 \rightarrow x = a$ jest asymptotą pionową.



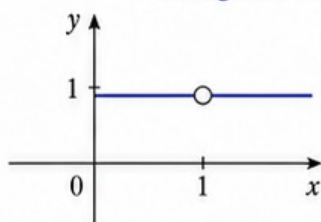
Mimo że z obu stron zachowanie jest „podobne”, granica w punkcie $x = 2$ nie istnieje (nie jest skończona), a funkcja nie jest tam ciągła.

Uwaga na różne rodzaje nieciągłości!

Przed uproszczeniem:

$$\frac{x-1}{x-1}$$

Po uproszczeniu: 1, ale w $x = 1$ mamy „dziurę” (luka).

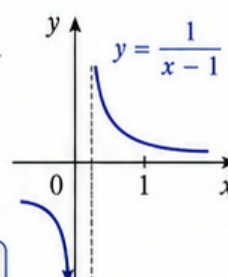


Nieciągłość usuwalna (otwór).

Inny przykład: $\frac{1}{x-1}$

W $x = 1$ funkcja rośnie do $+\infty$ z prawej i maleje do $-\infty$ z lewej.

Asymptota pionowa.



Wniosek

Nie każde miejsce, w którym mianownik zeruje się, daje tę samą nieciągłość.

Zawsze sprawdzaj po uproszczeniu!

Jak sprawdzić ciągłość bez zgadywania

Stosuj ten algorytm – działa zawsze.
Nie zgaduj, tylko sprawdzaj.

- 1 KROK 1 — Znajdź podejrzone punkty**
Szczególnie: zera mianownika, końce przedziałów w funkcjach przedziałowych, punkty zmiany wzoru oraz miejsca, gdzie pierwiastki lub logarytmy wchodzą na brzeg dziedziny.
- 2 KROK 2 — Oblicz $f(a)$**
Czy funkcja jest określona w tym punkcie?
Jeśli nie – zapisz „nieokreślona”.
- 3 KROK 3 — Oblicz granice jednostronne**
Oblicz $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- 4 KROK 4 — Porównaj je**
 - Jeśli są różne $\rightarrow$ nieciągłość skokowa.
 - Jeśli którejś z granic jest $\pm\infty \rightarrow$ nieciągłość nieskończona.
 - Jeśli są równe $\rightarrow$ istnieje granica obustronna $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.
- 5 KROK 5 — Porównaj granicę z $f(a)$**
 - Jeśli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \rightarrow$ funkcja jest ciągła w a .
 - Jeśli granica istnieje, ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a) \rightarrow$ nieciągłość usuwalna (dziura).

PRZYKŁAD DIAGNOSTYCZNY

Sprawdź ciągłość funkcji w punkcie $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x < 1 \\ 4 & \text{dla } x = 1 \\ 2x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

- 1 $f(1) = 4$
- 2 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 2) = 3$
- 3 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x) = 2$
- 4 $3 \neq 2 \rightarrow$ granica obustronna nie istnieje.



Wniosek:

Funkcja nie jest ciągła w $x = 1$.
Nieciągłość ma typ: **skokowa**.

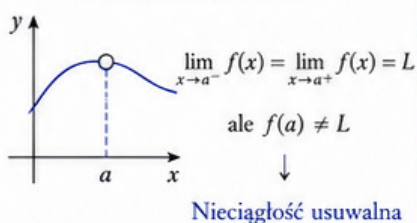


Uwaga!

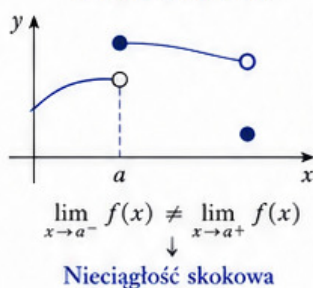
- Jeśli granice jednostronne są równe, ale $f(a)$ nie istnieje $\rightarrow$ nieciągłość usuwalna.
- Jeśli granica obustronna nie istnieje, funkcja nie jest ciągła – niezależnie od $f(a)$.

MAPA TRZECH TYPÓW

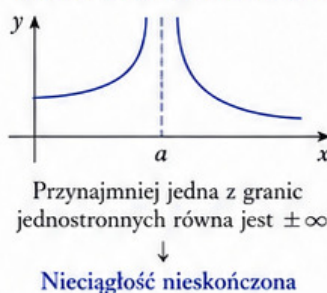
DZIURA (usuwalna)



SKOK (skokowa)



ASYMPTOTA (nieskończona)



MINI-TEST – sprawdź się!

- 1 Czy funkcja może mieć granicę w punkcie, w którym nie jest określona? **✓ Tak.**
- 2 Czy $f(a)$ istniejące wystarczy do ciągłości? **✓ Nie.**
- 3 Co oznacza różnica między granicą lewostronną i prawostronną? **✓ Granica obustronna nie istnieje.**
- 4 Jaki typ nieciągłości można naprawić zmianą jednej wartości? **✓ Nieciągłość usuwalna.**



Idziemy dalej

Granica mówi, do czego funkcja zmierza.
Ciągłość sprawdza, czy to zachowanie zgadza się z wartością funkcji.
Pochodna pójdzie krok dalej: opíše tempo, w jakim funkcja się zmienia.

..... $\rightarrow$ **Następny moduł:**
MODUŁ 04
Pochodna – tempo zmian

Pochodne i ich sens

Jak mierzyć tempo zmian i opisywać zachowanie funkcji

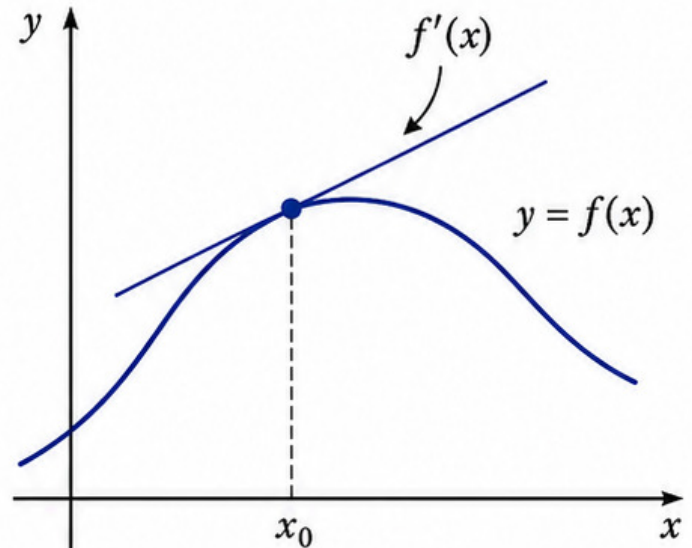


Zbudować rozumienie pochodnej od intuicji zmiany aż do praktycznego wykorzystania jej w badaniu funkcji.

Pochodna nie jest tylko wzorem do różniczkowania.

Odpowiada na pytania:

- jak szybko zmienia się funkcja,
- czy funkcja rośnie czy maleje,
- gdzie osiąga maksimum lub minimum,
- jakie jest nachylenie wykresu w konkretnym punkcie.



Pochodna mówi nie tylko, gdzie jesteś na wykresie, ale przede wszystkim — jak funkcja zachowuje się właśnie w tym miejscu.

Najpierw mierzymy zmianę średnią

Skąd bierze się pojęcie pochodnej i dlaczego potrzebujemy przejścia od średniego tempa zmian do tempa chwilowego.



Zrozumieć, jak z mierzenia zmian na odcinku dochodzimy do opisu zmiany w pojedynczym punkcie.

Przykład. Rozważmy funkcję $f(x) = x^2$.

Badamy zmianę między punktami o argumentach $x = 1$ i $x = 3$.

- Wartości funkcji: $f(1) = 1, f(3) = 9$
- Zmiana wartości funkcji: $\Delta y = f(3) - f(1) = 9 - 1 = 8$
- Zmiana argumentu: $\Delta x = 3 - 1 = 2$
- Średnie tempo zmian: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8}{2} = 4$

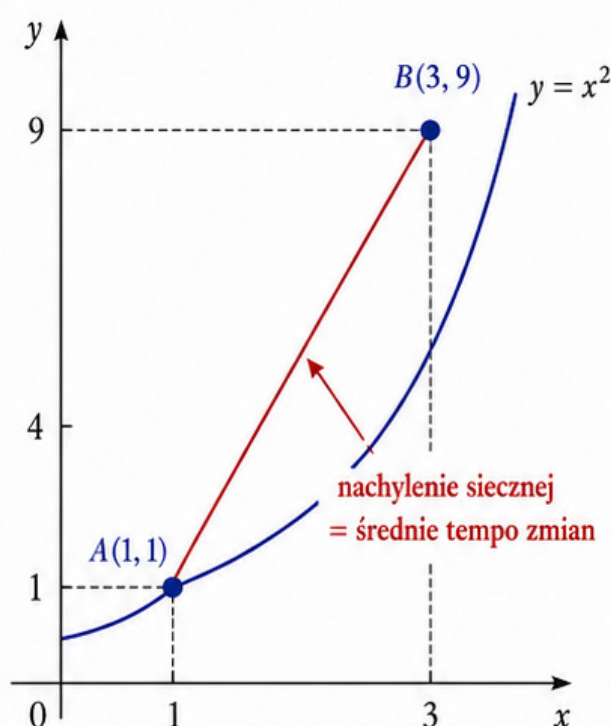
Liczba 4 opisuje średnią zmianę funkcji na całym przedziale od $x = 1$ do $x = 3$.

Nie mówi nam o dokładnej „szybkości” w punktach $x = 1$, $x = 2$ ani $x = 3$.

Iloraz różnicowy dla dwóch różnych punktów

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

To właśnie ta wielkość nazywa się ilorazem różnicowym dla punktów $x_1 \neq x_2$.



Krok dalej. Co się dzieje, gdy drugi punkt zbliża się do pierwszego?

Gdy x_2 coraz bardziej zbliża się do x_1 , punkt $B(x_2, f(x_2))$ przesuwa się po wykresie w kierunku punktu $A(x_1, f(x_1))$. Nachylenie siecznej AB (a więc średnie tempo zmian) zmienia się i dąży do pewnej granicy. Tę granicę nazywamy nachyleniem stycznej w punkcie x_1 , czyli **tempem chwilowym** w tym punkcie.



Most do pochodnej

Średnia zmiana dotyczy dwóch punktów.

Pochodna opisuje zmianę w jednym punkcie poprzez granicę.

Pochodna powstaje z granicy ilorazu różnicowego

Formalna definicja pochodzi z intuicji pomiaru tempa zmian.



$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Co oznaczają poszczególne elementy?

- x_0 — punkt, w którym badamy zmianę.
- h — mała zmiana argumentu.
- $f(x_0 + h) - f(x_0)$ — zmiana wartości funkcji.
- h w mianowniku — zmiana argumentu.
- $h \rightarrow 0$ — drugi punkt zbliża się do pierwszego.



Bierzemy dwa bardzo bliskie punkty na wykresie funkcji i liczymy średnie tempo zmiany między nimi (iloraz różnicowy). Następnie zmniejszamy odległość między tymi punktami. Jeśli ten iloraz dąży do konkretnej liczby, to właśnie ta liczba jest pochodną w punkcie x_0 .

PRZYKŁAD: z definicji wyznacz pochodną funkcji $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} && \text{definicja} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} && \text{obliczamy wartości funkcji} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} && \text{rozwijamy kwadrat} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} && \text{skracamy wyrażenie} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) && \text{upraszczamy} \\ &= 2x_0 && \text{podstawiamy granicę } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

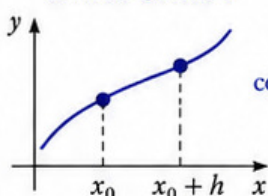
Wniosek: $f'(x) = 2x$.

Co naprawdę wydarzyło się w tym obliczeniu?

Nie podstawiamy od razu $h = 0$, bo otrzymalibyśmy dzielenie przez zero ($0/0$ — wyrażenie nieokreślone).

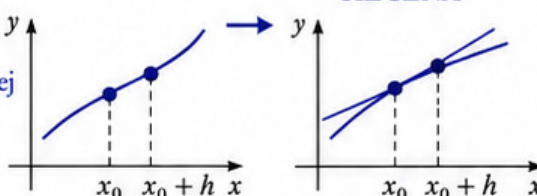
Najpierw upraszczamy wyrażenie ogólnie (dla $h \neq 0$), a dopiero na końcu bierzemy granicę, czyli „pozwalamy” h dążyć do 0.

DWA PUNKTY



coraz bliżej

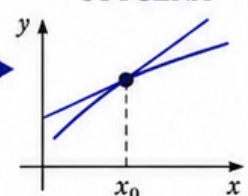
SIECZNA



GRANICA

$h \rightarrow 0$

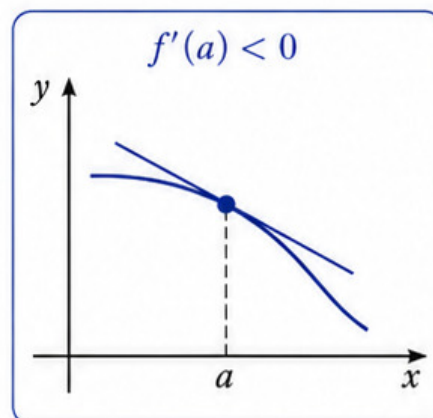
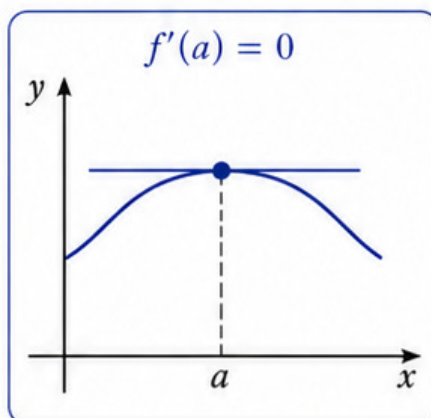
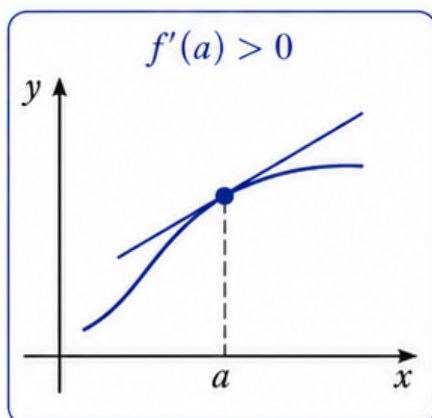
STYCZNA



Pochodna to nachylenie stycznej

Pochodna w punkcie a mówi nam, jak „stroma” jest funkcja w tym punkcie, czyli jakie jest nachylenie stycznej do jej wykresu.

- Jeśli $f'(a) > 0$, wykres funkcji lokalnie rośnie w pobliżu a .
- Jeśli $f'(a) < 0$, wykres funkcji lokalnie maleje w pobliżu a .
- Jeśli $f'(a) = 0$, styczna do wykresu w punkcie a jest pozioma.



PRZYKŁAD

Rozważmy funkcję $f(x) = x^2$. Mamy $f'(x) = 2x$.

Dla $x = 2$ otrzymujemy $f'(2) = 4$. Oznacza to, że styczna do paraboli w punkcie $(2, 4)$ ma nachylenie równe 4.

Równanie stycznej do wykresu funkcji w punkcie a ma postać:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Podstawiając $a = 2$, $f(2) = 4$ oraz $f'(2) = 4$, otrzymujemy:

$$y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 4$$



Styczna to prosta, która lokalnie najlepiej opisuje kierunek wykresu funkcji w danym punkcie. Jej nachylenie — pochodna — informuje, jak szybko zmienia się wartość funkcji w tym miejscu.



WAŻNE

Fakt, że $f'(a) = 0$, nie oznacza automatycznie, że w punkcie a funkcja ma maksimum lub minimum. Oznacza jedynie, że styczna jest pozioma. Aby stwierdzić, czy jest to maksimum, minimum czy punkt przegięcia, należy zbadać zachowanie funkcji w otoczeniu punktu a (np. za pomocą pochodnej drugiej lub analizy znaku f'').

Najważniejsze pochodne, które warto znać

1

Stała:

$$(c)' = 0$$

Przykład:

$$(7)' = 0$$

Stała liczba nie zmienia się, więc jej pochodna jest równa 0.

2

Potęga:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Przykłady:

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^5)' = 5x^4$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

dla odpowiedniej dziedziny

3

Funkcja wykładnicza:

$$(e^x)' = e^x$$

Funkcja wykładnicza jest wyjątkowa — jej pochodna jest równa jej samej.

4

Logarytm naturalny:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

dla $x > 0$

5

Trygonometria:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Powyższe wzory obowiązują tam, gdzie funkcja $\tan x$ jest określona.

6

Stały mnożnik i suma:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$



Przykład zbiorczy:

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 7 \rightarrow f'(x) = 12x^3 - 4x + 5$$



Nie różniczuj stałej jak potęgi

Pochodna liczby (bez x) jest zawsze równa 0.

Na przykład: $(7)' = 0$, $(-3.14)' = 0$, $(1000)' = 0$.

MODUŁ 04

Gdy funkcje są mnożone lub dzielone, potrzebujesz osobnej reguły

Unikaj błędu: nie różniczkuj wyraz po wyrazie.

1. ILOCZYN

Jeśli $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, to $F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Przykład: $F(x) = x^2 \cdot \sin x$

- $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$
- $g(x) = \sin x \Rightarrow g'(x) = \cos x$

Zatem

$$F'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$



BARDZO WAŻNE!

To nie jest prawda:

$$(fg)' \neq f'g'$$

2. ILORAZ

Jeśli $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, to $F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, $g(x) \neq 0$.

Przykład: $F(x) = \frac{x^2}{x+1}$

- $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$
- $g(x) = x+1 \Rightarrow g'(x) = 1$

Podstawiamy do reguły ilorazu: $F'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2}$

Upraszczamy licznik: $F'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$.



Jak zapamiętać regułę ilorazu?

Nie opieraj się tylko na „żelaznych” mnemotechnikach.

Najpierw poprawnie zidentyfikuj funkcje f , f' , g , g' , a dopiero potem podstaw je do wzoru. To najpewniejszy sposób na uniknięcie błędów.

Mini ćwiczenie: Oblicz pochodną funkcji $h(x) = x \cdot e^x$.

Odpowiedź: $h'(x) = e^x + x e^x = e^x(1 + x)$.

MODUŁ 04

Funkcja w funkcji: różniczkuj warstwami

Reguła łańcuchowa (łańcuch różniczkowania)

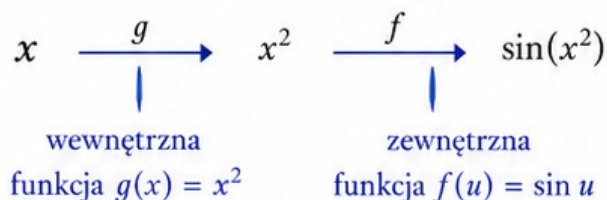
Intuicja: weźmy funkcję $\sin(x^2)$.

To nie jest zwykłe $\sin x$.

Mamy tu dwie warstwy:

- zewnętrzna: $\sin(\cdot)$
- wewnętrzna: x^2

WARSTWY FUNKCJI



REGUŁA ŁAŃCUCHOWA

Jeśli $F(x) = f(g(x))$,

to $F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Aby zróżniczkować funkcję złożoną, różniczkuj warstwami: pochodna zewnętrznej funkcji, ale wstawiona na wewnętrzną, razy pochodna wewnętrznej funkcji.

PRZYKŁADY

1 $F(x) = \sin(x^2)$

Zewnętrzna: $f(u) = \sin u$
 $f'(u) = \cos u$

Wewnętrzna: $g(x) = x^2$
 $g'(x) = 2x$

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \cos(x^2) \cdot 2x \\ &= 2x \cos(x^2) \end{aligned}$$

2 $F(x) = (3x + 1)^5$

Zewnętrzna: $f(u) = u^5$
 $f'(u) = 5u^4$

Wewnętrzna: $g(x) = 3x + 1$
 $g'(x) = 3$

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= 5(3x + 1)^4 \cdot 3 \\ &= 15(3x + 1)^4 \end{aligned}$$

3 $F(x) = \ln(x^2 + 1)$

Zewnętrzna: $f(u) = \ln u$
 $f'(u) = \frac{1}{u}$

Wewnętrzna: $g(x) = x^2 + 1$
 $g'(x) = 2x$

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \\ &= \frac{2x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$



TYPOWY BŁĄD
 $(\sin(x^2))' \neq \cos(x^2)$

To byłaby pochodna samej warstwy zewnętrznej, bez uwzględnienia warstwy wewnętrznej.

Brakuje pochodnej funkcji wewnętrznej!



ZAPAMIĘTAJ

Pochodna zewnętrznej $\times$ pochodna wewnętrznej.

Zawsze pamiętaj o obu warstwach:

**najpierw zewnętrzna (ale na wewnętrznej),
potem razy wewnętrzna.**

Znak pochodnej mówi, czy funkcja rośnie czy maleje



Główna zasada:

- jeśli na przedziale I mamy $f'(x) > 0$, to funkcja f jest rosnąca na I ,
- jeśli na przedziale I mamy $f'(x) < 0$, to funkcja f jest malejąca na I .

Punkt x_0 nazywamy **punktem krytycznym** funkcji f , jeśli:

- $f'(x_0) = 0$ lub
- pochodna f' nie istnieje w punkcie x_0 .

PRZYKŁAD

Rozważmy funkcję $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

- 1 Pochodna: $f'(x) = 2x - 4$.
- 2 Punkty krytyczne: rozwiązujemy $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.
- 3 Analiza znaku pochodnej:
 - dla $x < 2$: $f'(x) = 2x - 4 < 0 \Rightarrow$ funkcja maleje,
 - dla $x > 2$: $f'(x) = 2x - 4 > 0 \Rightarrow$ funkcja rośnie.
- 4 W punkcie $x = 2$ znak pochodnej zmienia się z „-” na „+” (**MALEJE $\rightarrow$ ROŚNIE**), zatem $x = 2$ jest punktem ekstremum lokalnego — **minimum lokalnego**.
- 5 Wartość funkcji w tym punkcie: $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$.
Minimum lokalne: $(2, -3)$.

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
f	$\searrow$	minimum lokalne	$\nearrow$

ROZPOZNAWANIE EKSTREMÓW

- jeśli f' zmienia znak z „-” na „+” ($- \rightarrow +$), to w punkcie mamy **minimum lokalne**,
- jeśli f' zmienia znak z „+” na „-” ($+ \rightarrow -$), to w punkcie mamy **maksimum lokalne**,
- jeśli znak f' się nie zmienia (np. $+ \rightarrow +$ lub $- \rightarrow -$), to w punkcie może nie być ekstremum.



Ważne

Warunek $f'(a) = 0$ wskazuje tylko kandydata na ekstremum.
Ekstremum występuje tylko wtedy, gdy znak f' zmienia się w punkcie a .

Jak z pochodnej zbudować obraz całej funkcji



Pełne badanie funkcji wymaga połączenia dziedziny, miejsc zerowych, pochodnej, monotoniczności i ekstremów w jedną spójną całość.

Krok 1 — dziedzina

$$D_f = \mathbb{R}.$$

Krok 2 — miejsca zerowe

$$x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ lub } x = \pm\sqrt{3}.$$

Krok 3 — pochodna

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

Krok 4 — punkty krytyczne

$$3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ lub } x = 1.$$

Krok 5 — znak pochodnej

Dla $x < -1$ mamy $f'(x) > 0$, dla $-1 < x < 1$ mamy $f'(x) < 0$, dla $x > 1$ mamy $f'(x) > 0$.

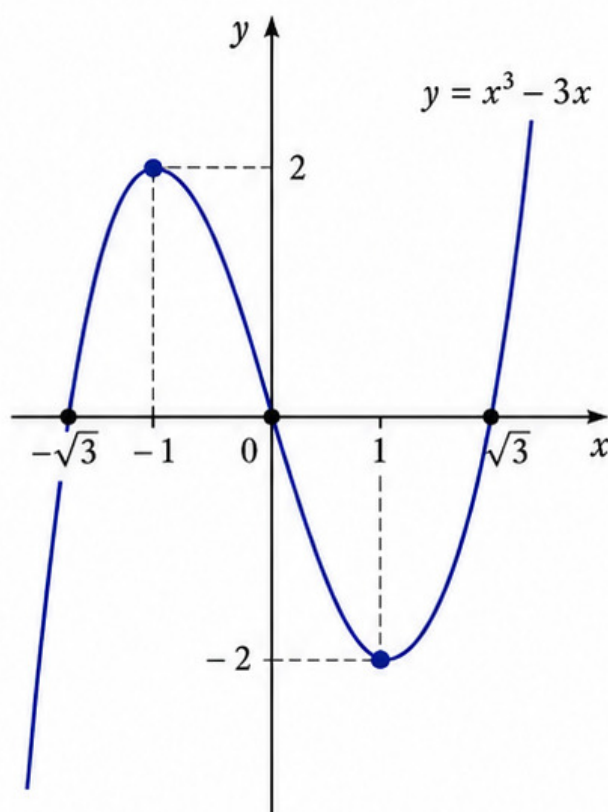
x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Krok 6 — wartości ekstremów

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2, \quad f(1) = 1^3 - 3 = -2.$$

Zatem mamy maksimum lokalne w punkcie $(-1, 2)$ oraz minimum lokalne w punkcie $(1, -2)$.

Przykład: $f(x) = x^3 - 3x$



Logika badania funkcji

Nie rysuj wykresu „na oko”. Najpierw zbierz informacje algebraiczne (dziedzina, miejsca zerowe, pochodna, znak, ekstrema), a dopiero potem zbuduj obraz funkcji.

Pochodne bez chaosu: zawsze zacznij od rozpoznania struktury

Zamykamy moduł 04 praktycznym algorytmem wyboru reguły różniczkowania i analizy funkcji.

1. ROZPOZNAJ TYP FUNKCJI

- Jeśli widzisz $x^n \rightarrow$ reguła potęgowa.
- Jeśli widzisz $f(x) + g(x) \rightarrow$ różniczkuj składniki osobno.
- Jeśli widzisz $f(x) \cdot g(x) \rightarrow$ reguła iloczynu.
- Jeśli widzisz $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow$ reguła ilorazu.
- Jeśli widzisz $f(g(x)) \rightarrow$ reguła łańcuchowa.



2. PRZYKŁADY DIAGNOSTYCZNE

A)	$f(x) = x^5 - 3x$	$\rightarrow$	metoda: podstawowe wzory
B)	$f(x) = x^2 e^x$	$\rightarrow$	metoda: reguła iloczynu
C)	$f(x) = \sin(3x)$	$\rightarrow$	metoda: reguła łańcuchowa
D)	$f(x) = \ln(x^2 + 1)$	$\rightarrow$	metoda: reguła łańcuchowa
E)	$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$	$\rightarrow$	metoda: reguła ilorazu

3. JEŚLI ZADANIE PYTA O ZACHOWANIE FUNKCJI

1. wyznacz dziedzinę,
2. oblicz pochodną,
3. znajdź punkty, gdzie $f'(x) = 0$ lub pochodna nie istnieje,
4. zbadaj znak f' ,
5. określ przedziały wzrostu i spadku,
6. rozpoznaj ekstrema,
7. dopiero wtedy sformułuj wnioski o wykresie.

MINI-TEST (Z ODPOWIEDZIAMI)

1.	Co geometrycznie oznacza $f'(a)$?	Nachylenie stycznej w punkcie.
2.	Jaki znak pochodnej oznacza wzrost?	$f'(x) > 0$.
3.	Czy $f'(a) = 0$ zawsze oznacza ekstremum?	Nie.
4.	Jaką regułę zastosujesz do $\cos(x^2)$?	Regułę łańcuchową.
5.	Jaką regułę zastosujesz do $x \cdot \ln x$?	Regułę iloczynu.



Pochodna opisuje tempo zmian.

Całka odwróci perspektywę: zamiast pytać „jak szybko coś się zmienia?”, będziemy pytać „jaka funkcja mogła dać taką pochodną?” oraz „jaką wielkość można zebrać z bardzo małych fragmentów?”.

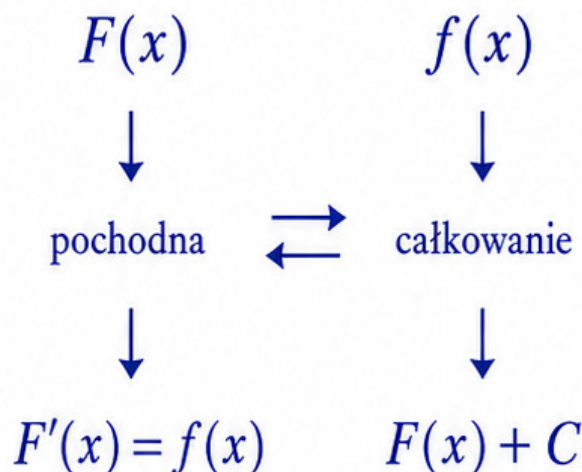
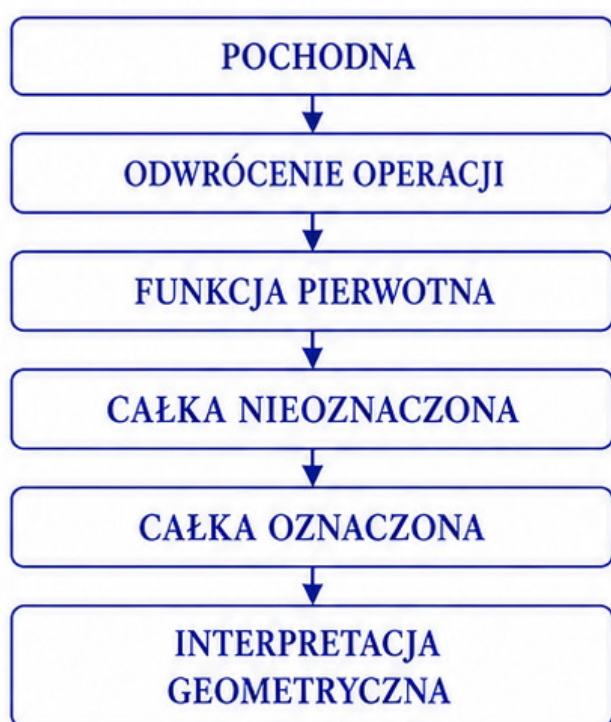
Całki bez zgadywania

Jak rozumieć funkcję pierwotną, pole i wybór właściwej metody całkowania



Zbudować intuicyjne i praktyczne rozumienie całek: od funkcji pierwotnej przez podstawowe reguły aż do całki oznaczonej i interpretacji geometrycznej.

Jeżeli pochodna odpowiada na pytanie: „Jak szybko zmienia się funkcja?” to całka może odpowiadać między innymi na pytania: „Jaka funkcja miała taką pochodną?” oraz: „Jaką łączną wielkość otrzymamy, jeśli zsumujemy bardzo wiele małych fragmentów?”



Całkowanie nie powinno polegać na zgadywaniu wzoru. Najpierw rozpoznaj strukturę funkcji.

Całka ma dwa ważne znaczenia



Cel: Od początku rozdzielić dwa konteksty: całkę nieoznaczoną jako rodzinę funkcji pierwotnych oraz całkę oznaczoną jako liczbę opisującą nagromadzoną wielkość.

1. Całka nieoznaczona

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \left| \quad \text{jeżeli } F'(x) = f(x) \right.$$

Szukamy funkcji, której pochodna daje funkcję znajdującą się pod znakiem całki.

Przykład: Ponieważ $(x^3)' = 3x^2$, to $\int 3x^2 dx = x^3 + C$.

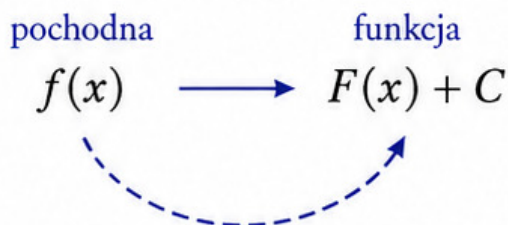
2. Całka oznaczona

$$\int_a^b f(x) dx$$

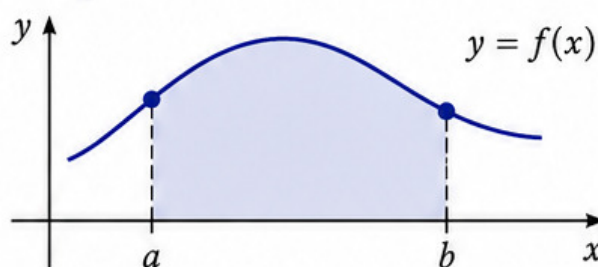
Tutaj wynik nie jest rodziną funkcji, lecz konkretną liczbą. Ta liczba opisuje nagromadzony efekt funkcji na przedziale od a do b .

Dla dodatniej funkcji całka oznaczona może odpowiadać polu obszaru pod wykresem.

$$\int f(x) dx \rightarrow \text{wynik: funkcja} + C$$



$$\int_a^b f(x) dx \rightarrow \text{wynik: liczba}$$



Całka daje liczbę równą polu zacięniowanego obszaru (ponieważ $f(x) \geq 0$ na $[a, b]$).



Nie myl tych dwóch zapisów.

Brak granic całkowania i obecność granic całkowania zmieniają charakter zadania.

Funkcja pierwotna to funkcja, której pochodną już znasz

Cel: Wyjaśnić relację między pochodną a całką oraz znaczenie stałej C .



Definicja (funkcja pierwotna).

Funkcję F nazywamy funkcją pierwotną funkcji f , jeśli $F'(x) = f(x)$.

Przykład główny

Dla $f(x) = 2x$ jedną funkcją pierwotną jest $F(x) = x^2$, bo $F'(x) = 2x$.

Sprawdźmy, że inne funkcje też mają tę samą pochodną:

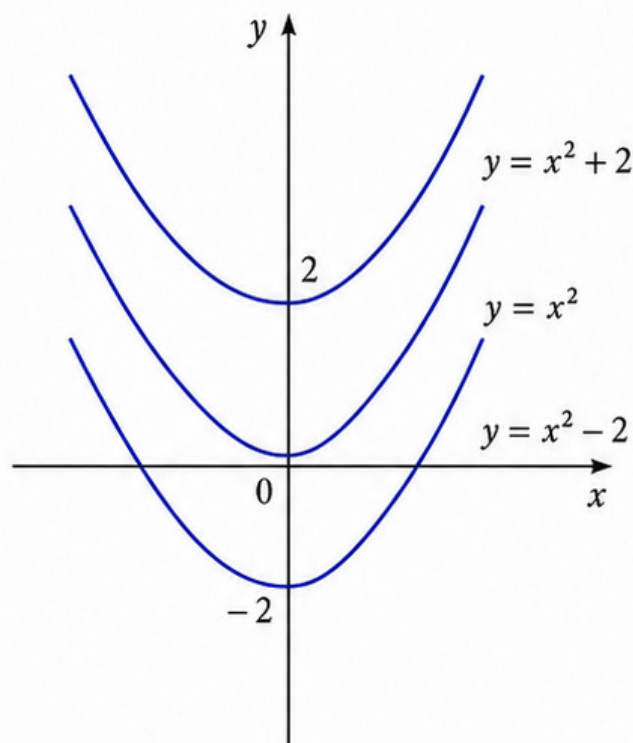
- $F_1(x) = x^2 + 1$
 $F'_1(x) = (x^2 + 1)' = 2x + 0 = 2x$
- $F_2(x) = x^2 - 7$
 $F'_2(x) = (x^2 - 7)' = 2x - 0 = 2x$
- $F_3(x) = x^2 + 100$
 $F'_3(x) = (x^2 + 100)' = 2x + 0 = 2x$

Wszystkie te funkcje mają tę samą pochodną: $2x$.

Wniosek (rodzina funkcji pierwotnych)

$$F(x) = x^2 + C$$

C oznacza dowolną stałą. Ponieważ pochodna każdej stałej wynosi 0, różne funkcje różniące się tylko stałą mają tę samą pochodną.



Ta sama pochodna $\rightarrow$ różne stałe C



Uwaga – typowy błąd!

W całce nieoznaczonej nie pomijaj $+C$.

$$\int 2x \, dx = x^2 + C,$$

a nie tylko x^2 .



Ćwiczenie (mini)

Znajdź funkcję pierwotną:

$$f(x) = 6x^2$$

Odpowiedź: $2x^3 + C$

Podstawowe całki jako odwrotność różniczkowania



Stworzyć czytelną kartę najważniejszych wzorów, pokazując ich związek z pochodnymi.

1 Potęgi

$$n \neq -1$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Przykład:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$



WAŻNY WYJĄTEK

Dla $n = -1$, czyli $\frac{1}{x}$,
mamy $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
dla $x \neq 0$.

2 Stała

$$\int k dx = kx + C$$

Przykład:

$$\int 5 dx = 5x + C$$

3 Funkcja wykładnicza

$$\int e^x dx = e^x + C$$

4 Trygonometria

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

5 Liniowość

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \int f(x) dx$$

Przykład zbiorczy

$$\int (3x^2 - 4x + 2) dx$$

Liczymy składnik po składniku:

$$\begin{aligned} & \int 3x^2 dx - \int 4x dx + \int 2 dx \\ &= 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x + C \\ &= x^3 - 2x^2 + 2x + C \end{aligned}$$



Kontrola wyniku

Po obliczeniu całki nieoznaczonej
możesz sprawdzić odpowiedź
przez różniczkowanie.
Jeżeli $F'(x) = f(x)$,
wynik jest poprawny.

POCHODNA ↔ CAŁKA

Pochodna

$$\left(\frac{x^4}{4} \right)' = x^3$$



Całka

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

Podstawienie odwraca regułę łańcuchową



Pokazać metodę podstawienia jako sposób rozpoznawania funkcji złożonej i jej wewnętrznej pochodnej.

Przy różniczkowaniu $F(g(x))$ używaliśmy reguły łańcuchowej.

Przy całkowaniu szukamy często odwrotnego wzorca: $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Przykład główny

Oblicz: $\int 2x \cdot \cos(x^2) dx$.

Krok 1 — rozpoznaj funkcję wewnętrzną

W cosinusie jest x^2 , więc przyjmujemy $u = x^2$.

Krok 2 — policz różniczkę

$$du = 2x dx.$$

Krok 3 — podstaw

$$\int 2x \cdot \cos(x^2) dx = \int \cos u du.$$

Krok 4 — całkuj

$$\int \cos u du = \sin u + C.$$

Krok 5 — wróć do x

$$\sin u + C = \sin(x^2) + C.$$

Sprawdzenie: $[\sin(x^2)]' = \cos(x^2) \cdot 2x$,

czyli dokładnie funkcja podcałkowa.

Drugi przykład

Oblicz: $\int 3x^2 (x^3 + 1)^5 dx$.

Niech $u = x^3 + 1$.

Wtedy $du = 3x^2 dx$.

Po podstawieniu:

$$\int 3x^2 (x^3 + 1)^5 dx = \int u^5 du.$$

Całkujemy:

$$\int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C.$$

Wróć do x :

$$\frac{(x^3 + 1)^6}{6} + C.$$



Jak rozpoznać podstawienie?

Szukaj sytuacji: funkcja złożona + obok jej wewnętrzna pochodna.

Nie musi być identyczna — czasem różni się tylko stałym mnożnikiem.



Typowy błąd

Wprowadzenie u , ale pozostawienie części wyrażenia nadal zapisanej przez x . Po podstawieniu cała całka powinna być konsekwentnie zapisana w nowej zmiennej.

Gdy całka zawiera iloczyn, rozdziel role funkcji



Cel: Wyjaśnić metodę całkowania przez części jako odwrócenie reguły iloczynu.

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Intuicja: Reguła iloczynu: $(uv)' = u'v + uv'$.

Po odpowiednim przekształceniu prowadzi do wzoru całkowania przez części.

Przykład 1. Oblicz: $\int x e^x \, dx$.

- Wybór: $u = x$, $dv = e^x \, dx$
- Różniczkujemy u : $du = dx$
- Całkujemy dv : $v = e^x$
- Podstawiamy do wzoru:

$$\begin{aligned} \int x e^x \, dx &= x e^x - \int e^x \, dx \\ &= x e^x - e^x + C \\ &= e^x (x - 1) + C \end{aligned}$$

Przykład 2. Oblicz: $\int x \cos x \, dx$.

- Wybór: $u = x$, $dv = \cos x \, dx$
- Różniczkujemy u : $du = dx$
- Całkujemy dv : $v = \sin x$
- Stosujemy wzór:

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

Szablon do zapamiętania:

u	du
dv	v



Jak wybierać u ?

W praktyce jako u często warto wybrać funkcję, która po zróżniczkowaniu staje się prostsza.

Dobre kandydatki na u :

- $\ln x$
- wielomian
- funkcja odwrotna trygonometryczna



Uwaga!

Typowy błąd: nie zapominaj o znaku minus:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Od funkcji pierwotnej do konkretnej liczby



Nauczyć obliczania całki oznaczonej za pomocą twierdzenia Newtona–Leibniza.

Jeżeli $F'(x) = f(x)$, to $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Najpierw znajdujemy funkcję pierwotną.

Potem obliczamy jej wartość na końcu przedziału i odejmujemy wartość na początku.

PRZYKŁAD 1

Oblicz: $\int_0^2 x dx$.

1. Funkcja pierwotna: $F(x) = \frac{x^2}{2}$
2. Zastosowanie wzoru Newtona–Leibniza:

$$F(2) - F(0) = \frac{4}{2} - 0 = 2$$

Odpowiedź: 2

PRZYKŁAD 2

Oblicz: $\int_1^3 2x dx$.

1. Funkcja pierwotna: $F(x) = x^2$
2. Zastosowanie wzoru Newtona–Leibniza:

$$F(3) - F(1) = 3^2 - 1^2 = 8$$

Odpowiedź: 8

FUNKCJA PODCAŁKOWA



FUNKCJA PIERWOTNA



$F(b) - F(a)$



LICZBA



WAŻNE

Przy całce oznaczonej końcowy wynik nie zawiera $+C$.

Jeżeli użyjemy $F(x) + C$, to
 $[F(b) + C] - [F(a) + C]$,
 więc stałe się redukują.



Kolejność ma znaczenie.

Zawsze: górna granica minus dolna granica,
 czyli $F(b) - F(a)$.

Całka oznaczona mierzy pole ze znakiem



Cel: Wyjaśnić geometryczną interpretację całki i zapobiec utożsamianiu każdej całki oznaczonej ze zwykłym dodatnim polem.

Przykład 1 — funkcja nad osią

Niech $f(x) = x$ na przedziale $[0, 2]$.

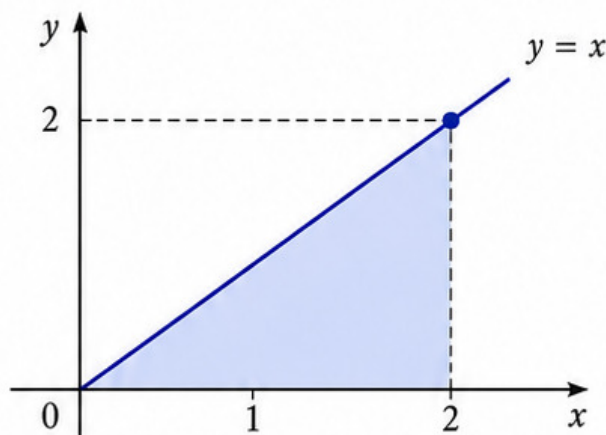
Wykres tworzy trójkąt o podstawie 2 i wysokości 2.

Pole geometryczne:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2.$$

Całka oznaczona: $\int_0^2 x \, dx = 2.$

Wyniki są zgodne.

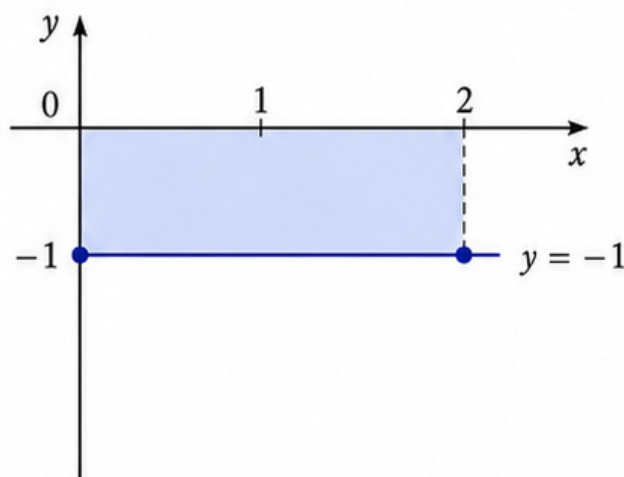


Przykład 2 — funkcja pod osią

Niech $f(x) = -1$ na przedziale $[0, 2]$.

Całka oznaczona: $\int_0^2 (-1) \, dx = -2.$

Pole geometryczne prostokąta ma wartość 2.



Całka oznaczona daje pole ze znakiem:
obszar nad osią OX wnosi wartość dodatnią,
obszar pod osią OX wnosi wartość ujemną.



Uwaga: Jeśli zadanie pyta o rzeczywiste pole geometryczne, trzeba podzielić przedział w miejscach zerowych funkcji i odpowiednio uwzględnić wartości bezwzględne.

Schemat (gdy f ma jedno miejsce zerowe c w (a, b)):

$$P = \int_a^c f(x) \, dx - \int_c^b f(x) \, dx.$$

Ogólnie: $P = \int_a^b |f(x)| \, dx.$



Typowy błąd: Ujemna całka nie oznacza ujemnego pola geometrycznego. Oznacza, że przeważa część wykresu znajdująca się pod osią OX .

MODUŁ 04

Najpierw rozpoznaj wzorzec, dopiero potem całkuj



Cel: Dać studentowi praktyczny algorytm decyzyjny do wyboru podstawowej metody.

KROK 1 — Czy widzę bezpośrednio wzór podstawowy?



Przykład: $\int x^4 dx \rightarrow$ użyj wzoru potęgowego.

KROK 2 — Czy funkcja składa się z sumy?



Przykład: $\int (x^2 + e^x) dx \rightarrow$ całkuj składniki osobno.

KROK 3 — Czy widzę funkcję złożoną i pochodną jej wnętrza?



Przykład: $\int 2x e^{x^2} dx \rightarrow$ podstawienie.

KROK 4 — Czy widzę iloczyn funkcji, z których jedna upraszcza się po różniczkowaniu?



Przykład: $\int x e^x dx \rightarrow$ całkowanie przez części.

KROK 5 — Czy warto najpierw uprościć algebraicznie?



Przykład: $\int \frac{x^2 + x}{x} dx \rightarrow$ najpierw uprość:
 $\frac{x^2 + x}{x} = x + 1$, potem całkuj.

Cztery zadania diagnostyczne

A)	$\int (3x^2 + 2) dx$	Metoda: wzory podstawowe.
B)	$\int x \cos(x^2) dx$	Metoda: podstawienie.
C)	$\int x \ln x dx$	Metoda: przez części.
D)	$\int \frac{x^2 - 1}{x} dx$	Najpierw uprościć: $x - \frac{1}{x}$, potem użyć wzorów podstawowych.



Najważniejsza zasada:

nie pytaj 'Który wzór mam zapamiętać?'.

Pytaj: 'Jaką strukturę ma funkcja podcałkowa?'

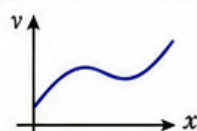


- ✓ uprość wyrażenie,
- ✓ rozpoznaj typ funkcji,
- ✓ sprawdź funkcję wewnętrzną,
- ✓ poszukaj jej pochodnej,
- ✓ dopiero wtedy wybierz metodę.

Cała Analiza Matematyczna 1 na jednej mapie

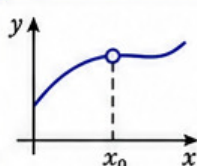


Zamknąć cały materiał spójnym obrazem zależności między pojęciami oraz dać studentowi prostą strategię dalszych powtórek.



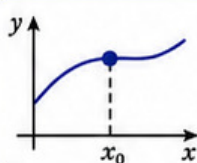
1. FUNKCJA

Co przyporządkowuje argumentowi?



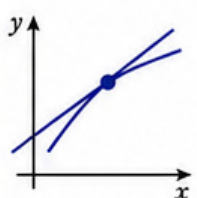
2. GRANICA

Do czego zmierza funkcja w pobliżu punktu?



3. CIĄGŁOŚĆ

Czy granica zgadza się z wartością funkcji?



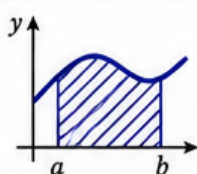
4. POCHODNA

Jak szybko funkcja się zmienia?

- wzrost
- spadek
- ekstrema
- kształt wykresu



różniczkowanie $\leftrightarrow$ całkowanie



5. CAŁKA

Jaka funkcja daje tę pochodną lub jaka wielkość akumuluje się na przedziale?

5 pytań, które warto umieć zadać sobie na egzaminie

1. Jaka jest dziedzina?
2. Co się stanie po bezpośrednim podstawieniu?
3. Jaką strukturę algebraiczną widzę?
4. Jaką informację daje mi pochodna lub granica?
5. Czy mogę sprawdzić wynik operacją odwrotną?

Jak powtarzać materiał

KROK 1 — Zrozum pojęcie

Nie zaczynaj od wzoru.

KROK 2 — Przeanalizuj przykład

Zatrzymuj się przed każdym krokiem i przewiduj, co nastąpi.

KROK 3 — Rozwiąż podobne zadanie bez patrzenia

Dopiero wtedy sprawdź odpowiedź.

KROK 4 — Nazwij metodę

Powiedz własnymi słowami: „Użyłem tej metody, ponieważ...”

KROK 5 — Wróć do błędów

Błąd powinien stać się wskazówką, którego pojęcia jeszcze nie rozumiesz wystarczająco dobrze.



Ostatnia zasada

Nie próbuj zapamiętać całej analizy jako listy procedur. Szukaj zależności między pojęciami. Granica prowadzi do pochodnej. Pochodna opisuje zachowanie funkcji. Całka wykorzystuje odwrotną relację i pozwala opisywać nagromadzone wielkości.

Jeżeli potrafisz wyjaśnić, dlaczego wykonujesz dany krok, jesteś znacznie bliżej samodzielnego rozwiązania niż wtedy, gdy pamiętasz tylko sam wzór.