

Zeszyt rozwiązanych zadań

Analiza Matematyczna 1

krok po kroku



Zobacz strategię.



Zrozum każdy krok.



Rozwiązuj samodzielnie.

Zadanie

Wyznacz granicę funkcji:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Krok 1. Sprawdzenie postaci granicy

Dla $x \rightarrow 0$ mamy $\frac{\sin x}{x} \rightarrow \frac{0}{0}$

Postać nieoznaczona typu $0/0$.

Krok 2. Przekształcenie wyrażenia

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \cdot \sin x$$

Krok 3. Zastosowanie granic elementarnych

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\text{stąd} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

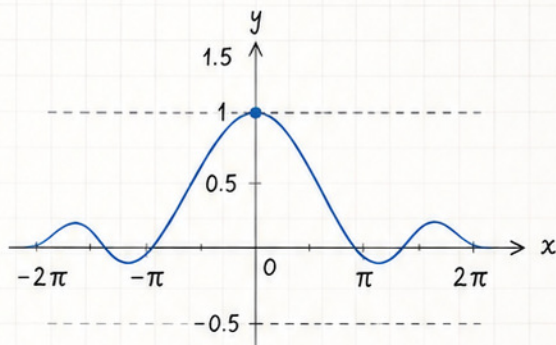
Krok 4. Obliczenie granicy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \sin x \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \right) = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Odpowiedź: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Szkic funkcji

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$



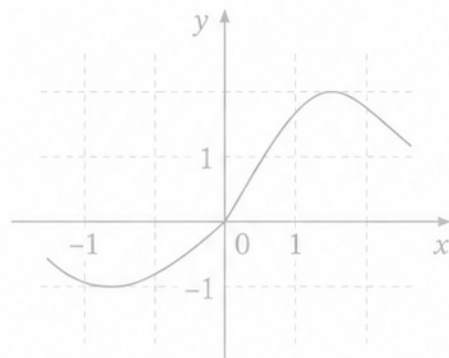
Dlaczego to działa?

Rozłożyliśmy wyrażenie na iloczyn dwóch funkcji, dla których znamy granice. Dzięki temu trudna granica została sprowadzona do prostych, znanych wyników.

Przydatne narzędzia

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
 - $f'(x)$
 - $\int_a^b f(x) dx$
- Znamy definicje.
Stosujemy świadomie.
Rozwiązujemy krok po kroku.

Informacje o materiale



© Zeszyt rozwiązanych zadań

Wszelkie prawa zastrzeżone.

Niniejszy materiał został przygotowany jako pomoc w nauce Analizy Matematycznej 1.

Zadania, rozwiązania i komentarze dydaktyczne służą do nauki, powtórki oraz rozwijania umiejętności samodzielnego rozwiązywania problemów matematycznych.

Materiał nie stanowi gwarancji uzyskania określonej oceny ani zaliczenia egzaminu.

Zabrania się kopiowania, reprodukowania, odsprzedawania oraz publicznego udostępniania całości lub fragmentów materiału bez odpowiedniej zgody właściciela praw.

Spis treści

START

- 00 — Okładka
- 01 — Informacje o materiale
- 02 — **Spis treści**
- 03 — Jak korzystać z zeszytu

MODUŁ 01 — FUNDAMENTY

- 04 — Start modułu
- 05 — Dziedzina i zbiór wartości
- 06 — Przekształcenia algebraiczne
- 07 — Potęgi, pierwiastki i logarytmy
- 08 — Trygonometria
- 09 — Złożenie i funkcja odwrotna
- 10 — Równania i nierówności
- 11 — Wartość bezwzględna
- 12 — Analiza wykresu
- 13 — Zadanie przekrojowe

MODUŁ 03 — POCHODNE

- 24 — Start modułu
- 25 — Pochodna z definicji
- 26 — Podstawowe reguły
- 27 — Iloczyn i iloraz
- 28 — Reguła łańcuchowa
- 29 — Funkcje szczególne
- 30 — Styczna i normalna
- 31 — Monotoniczność i ekstrema
- 32 — Badanie funkcji
- 33 — Zadanie przekrojowe

MODUŁ 05 — STRATEGIA

- 44 — Start modułu
- 45 — Jak rozpoznać typ zadania
- 46 — Zadanie mieszane 1
- 47 — Zadanie mieszane 2
- 48 — Zadanie mieszane 3
- 49 — Mapa strategii i checklista

MODUŁ 02 — GRANICE I CIĄGŁOŚĆ

- 14 — Start modułu
- 15 — Bezpośrednie podstawienie
- 16 — Postać 0/0
- 17 — Rozkład na czynniki
- 18 — Usuwanie niewymierności
- 19 — Granice w nieskończoności
- 20 — Granice jednostronne
- 21 — Ciągłość
- 22 — Nieciągłości
- 23 — Zadanie przekrojowe

MODUŁ 04 — CAŁKI

- 34 — Start modułu
- 35 — Całki podstawowe
- 36 — Podstawienie
- 37 — Całkowanie przez części
- 38 — Funkcje wymierne
- 39 — Całka oznaczona
- 40 — Pole pod wykresem
- 41 — Pole między wykresami
- 42 — Wybór metody
- 43 — Zadanie przekrojowe

Nie ucz się odpowiedzi. Ucz się sposobu myślenia.

Wprowadzenie

W Analizie Matematycznej największą trudnością często nie jest samo wykonanie obliczeń. Problem pojawia się chwilę wcześniej:

Od czego mam zacząć?

Ten zeszyt został zbudowany właśnie po to, aby odpowiedzieć na to pytanie. Przy każdym zadaniu zobaczysz nie tylko kolejne działania, lecz również powód wyboru konkretnej metody.

Schemat pracy z każdym zadaniem:

1. Przeczytaj treść i spróbuj określić typ problemu.
2. Zanim spojrzysz na rozwiązanie, zapisz pierwszy krok samodzielnie.
3. Porównaj swoją decyzję z sekcją „Strategia”.
4. Przejdź przez rozwiązanie krok po kroku.
5. Zwróć szczególną uwagę na pola „Dlaczego?” i „Uwaga”.
6. Zakryj rozwiązanie i spróbuj wykonać zadanie ponownie.



Jeśli rozumiesz powód wykonania każdego kroku, zaczniesz rozwiązywać zadania — zamiast jedynie zapamiętywać przykłady.



ROZPOZNAJ



WYBIERZ METODĘ



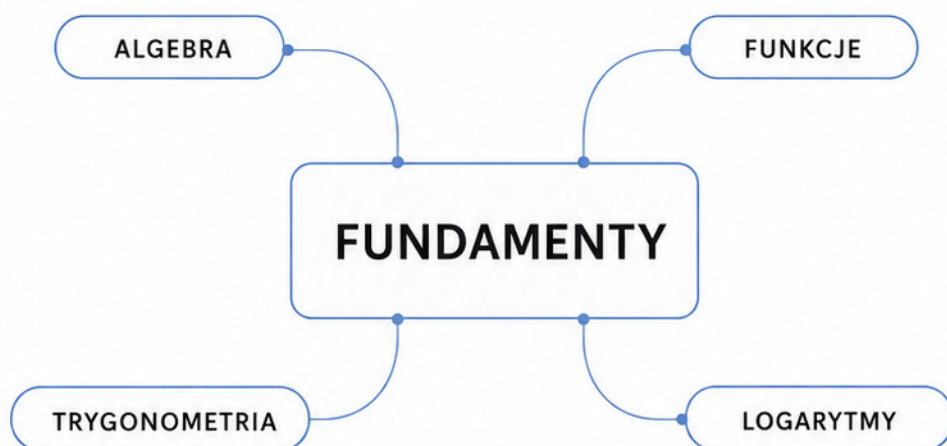
OBLICZ



SPRAWDŹ

Fundamenty potrzebne do rozwiązywania zadań

Zanim policzysz granicę, pochodną lub całkę —
upewnij się, że algebra nie zatrzyma Cię po drodze.



Cel modułu:

Odświeżyć narzędzia matematyczne,
które będą wielokrotnie wykorzystywane
w dalszej części zeszytu.



Czytelnik przećwicz:

- dziedzinę i zbiór wartości,
- przekształcenia algebraiczne,
- potęgi i logarytmy,
- podstawowe zależności trygonometryczne,
- funkcje złożone i odwrotne,
- równania i nierówności,
- wartość bezwzględną,
- czytanie informacji z wykresu.



Te narzędzia wrócą przy granicach, pochodnych i całkach.

Zadanie 01 – Najpierw sprawdź, gdzie funkcja istnieje

Wyznacz dziedzinę funkcji:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x-4}}{x-3}$$

1. Rozpoznanie

Co w tym wzorze może ograniczać wartości x ?

Pierwiastek:

Wyrażenie pod pierwiastkiem parzystego stopnia musi być nieujemne.

$$2x - 4 \geq 0$$

Mianownik:

Nie wolno dzielić przez zero.

$$x - 3 \neq 0$$

2. Rozwiązanie krok po kroku

Krok 1 – warunek z pierwiastka

$$2x - 4 \geq 0$$

$$2x \geq 4$$

$$x \geq 2$$

Dlaczego?

Ponieważ pierwiastek kwadratowy w zbiorze liczb rzeczywistych nie jest określony dla liczby ujemnej.

Krok 2 – warunek z mianownika

$$x - 3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

Dlaczego?

Dzielenie przez zero nie jest określone.

Krok 3 – połącz oba warunki

Potrzebujemy jednocześnie: $x \geq 2$ oraz $x \neq 3$

$$D_f = [2, 3) \cup (3, +\infty)$$

3. Wizualizacja



4. Mini-zasada

DZIEDZINA – SZYBKA CHECKKLISTA

- mianownik $\rightarrow \neq 0$
- pierwiastek parzystego stopnia $\rightarrow$ zawartość ≥ 0
- logarytm $\rightarrow$ argument > 0

Minićwiczenie bez pełnego rozwiązania:

Wyznacz dziedzinę:

$$g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x-2}$$

Odpowiedź kontrolna: $(-1, 2) \cup (2, +\infty)$

Zadanie 02 — Uprość zanim zaczniesz liczyć

Uprość wyrażenie: $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$, dla $x \neq 3$.

1. Strategia

Czy licznik można rozłożyć na czynniki?

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

2. Rozwiązanie krok po kroku

Krok 1. $x^2 - 9 = x^2 - 3^2$

Krok 2. $x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$

Krok 3. Podstaw do wyrażenia: $\frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$

Krok 4. Dla $x \neq 3$ można skrócić czynnik $x - 3$.
Otrzymujemy: $x + 3$

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3, \text{ dla } x \neq 3$$

3. Uwaga!

Nie pisać: $x - 3 = 0$ i nie skracać bez uwzględnienia ograniczenia.

Skracamy czynniki, a nie składniki sumy lub różnicy.

✓ $\frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$ | ✗ $\frac{x^2 - 9}{x - 3} \rightarrow$ skreślenie ✗

4. Wzory, które warto rozpoznawać od razu

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

★ 5. Ta umiejętność wróci przy granicach typu $\frac{0}{0}$.

Zadanie 03 — Zamień skomplikowany zapis na prostszą postać

Rozwiąż równanie:

$$2^{x+1} = 16$$

1. Rozpoznanie

Czy 16 można zapisać jako potęgę liczby 2?

Tak: $16 = 2^4$

2. Rozwiązanie

$$2^{x+1} = 2^4$$

Jeżeli podstawy są jednakowe, porównujemy wykładniki:

$$x + 1 = 4$$

$$x = 3$$

Odpowiedź: $x = 3$

3. Dlaczego ta strategia działa?

Funkcja wykładnicza o podstawie $a > 0$, $a \neq 1$ przyjmuje tę samą wartość dla tego samego wykładnika. Jeśli więc obie strony mają tę samą podstawę, można porównać ich wykładniki.

4. Drugi mikroprzykład — logarytm

Rozwiąż: $\log_2(x) = 3$

Korzystamy z definicji: $\log_a(b) = c \Leftrightarrow a^c = b$

$$2^3 = x$$

$$x = 8$$

5. Mapa pamięciowa

POTĘGA

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

LOGARYTM

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^k) = k \log_a x$$

6. Pułapka

$$\log(a + b) \neq \log a + \log b$$

Zadanie 04 — Rozpoznaj tożsamość, zanim wykonasz obliczenia

Uprość:

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$$

1. Rozpoznanie pierwszego fragmentu

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$$

$$\text{staje się: } 1 + 2 \sin x \cos x$$

2. Alternatywne spojrzenie

Pierwotne wyrażenie można również rozpoznać jako:

$$(\sin x + \cos x)^2$$

$$\text{ponieważ: } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

3. Kluczowe zależności

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

4. Dlaczego warto je znać?

Tożsamości trygonometryczne często umożliwiają uproszczenie wyrażenia przed liczeniem granicy, pochodnej lub całki.

5. Mini-zadanie

$$\text{Uprość: } \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x}$$

Podpowiedź:

$$\text{Zacznij od } \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

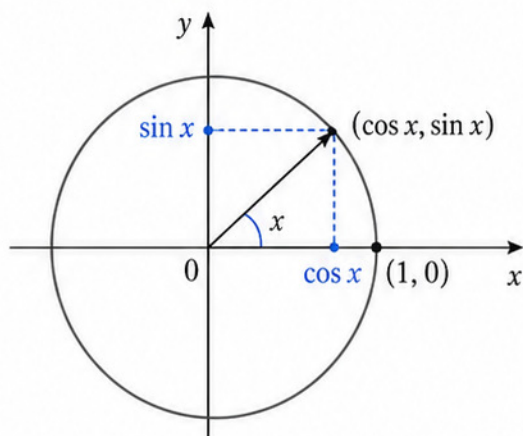
Rozwiązanie kontrolne:

$$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$\text{więc: } \frac{\sin^2 x}{\sin x} = \sin x$$

$$\text{dla } \sin x \neq 0.$$

6. Element wizualny



Zadanie 05 — Która funkcja działa jako pierwsza?

Dane są funkcje:

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = x^2$$

Wyznacz: $(f \circ g)(x)$ oraz $(g \circ f)(x)$.

1. Wyjaśnienie pojęcia

$(f \circ g)(x)$ oznacza: najpierw wykonaj g , potem f .

Czyli: $f(g(x))$

2. Pierwsze złożenie

$$g(x) = x^2$$

Wstawiamy $g(x)$ do funkcji f :

$$f(g(x)) = 2(x^2) + 1$$

$$\text{Zatem: } (f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$$

3. Drugie złożenie

$$\text{Najpierw: } f(x) = 2x + 1$$

Wstawiamy wynik do g :

$$g(f(x)) = (2x + 1)^2$$

$$\text{Rozwijamy: } (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\text{Zatem: } (g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x + 1$$

4. Najważniejszy wniosek

$$f \circ g \neq g \circ f$$

$$f \circ g = 2x^2 + 1$$

$$g \circ f = 4x^2 + 4x + 1$$

5. Mikrosekcja — funkcja odwrotna

Dla: $f(x) = 2x + 1$ znajdź $f^{-1}(x)$.

$$\text{Krok 1: } y = 2x + 1$$

$$\text{Krok 2 — zamień } x \text{ i } y: x = 2y + 1$$

$$\text{Krok 3 — wyznacz } y: x - 1 = 2y, \\ y = \frac{x - 1}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$$

6. Kontrola

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

7. Element wizualny

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{g} & g(x) & \xrightarrow{f} & f(g(x)) \\ x & \xrightarrow{f} & f(x) & \xrightarrow{g} & g(f(x)) \end{array}$$

Zadanie 06 — Najpierw uporządkuj, potem rozwiąż

Rozwiąż nierówność:

$$(x - 1)(x + 3) \leq 0$$

1. Rozpoznanie

Kiedy iloczyn dwóch czynników jest mniejszy lub równy zero?

Iloczyn jest ujemny, gdy czynniki mają przeciwne znaki.

Iloczyn jest równy zero, gdy przynajmniej jeden czynnik jest równy zero.

2. Znajdź miejsca zerowe

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Na osi liczbowej zaznaczamy punkty: -3 oraz 1

Dzielimy oś na trzy przedziały:

$$(-\infty, -3)$$

$$(-3, 1)$$

$$(1, +\infty)$$

3. Zbadaj znaki

Przedział	$x - 1$	$x + 3$	Iloczyn
$x < -3$	$-$	$-$	$+$
$-3 < x < 1$	$-$	$+$	$-$
$x > 1$	$+$	$+$	$+$

4. Uwzględnij znak nierówności

$$\leq 0$$

- część, gdzie iloczyn jest ujemny,
- oraz miejsca, gdzie iloczyn jest równy zero.

$$x \in [-3, 1]$$

Odpowiedź: $[-3, 1]$



5. Pole „Strategia”

Gdy masz iloczyn lub iloraz w nierówności:

1. Przenieś wszystko na jedną stronę.
2. Rozłóż wyrażenie na czynniki.
3. Znajdź miejsca zerowe.
4. Zbuduj przedziały.
5. Sprawdź znaki.
6. Wybierz przedziały zgodne z nierównością.

6. Pułapka



Nie można rozwiązać nierówności iloczynowej wyłącznie przez zapis:

$$x - 1 \leq 0 \text{ oraz } x + 3 \leq 0$$

To nie opisuje wszystkich sytuacji, w których iloczyn jest niedodatni.

7. Mini-zadanie

Rozwiąż: $(x - 2)(x + 1) > 0$

Odpowiedź kontrolna:

$$(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

Zadanie 07 — Wartość bezwzględna jako odległość

Rozwiąż nierówność:

$$|2x - 3| < 5$$

1. Interpretacja

$|2x - 3| < 5$ oznacza, że liczba $2x - 3$ znajduje się w odległości mniejszej niż 5 od zera.

$$-5 < 2x - 3 < 5$$

2. Rozwiązanie krok po kroku

Dodajemy 3 do wszystkich części nierówności:

$$-2 < 2x < 8$$

Dzielimy przez 2:

$$-1 < x < 4$$

Odpowiedź: $x \in (-1, 4)$

3. Wizualizacja



4. Reguły pamięciowe

Jeżeli $|A| < k$, to $-k < A < k$

Jeżeli $|A| \leq k$, to $-k \leq A \leq k$

Jeżeli $|A| > k$, to $A < -k$ lub $A > k$

Jeżeli $|A| \geq k$, to $A \leq -k$ lub $A \geq k$

dla $k > 0$.

5. Dlaczego zmienia się strategia?

Nierówność typu „mniej niż” opisuje obszar wewnątrz pewnej odległości.

Nierówność typu „więcej niż” opisuje obszar na zewnątrz tej odległości.

6. Mini-zadanie

Rozwiąż: $|x + 2| \geq 3$

$$x + 2 \leq -3 \text{ lub } x + 2 \geq 3$$

$$x \leq -5 \text{ lub } x \geq 1$$

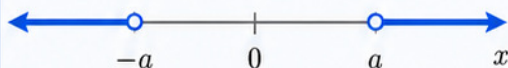
Odpowiedź kontrolna: $(-\infty, -5] \cup [1, +\infty)$

7. Element wizualny

$|x| < a$ — wewnątrz



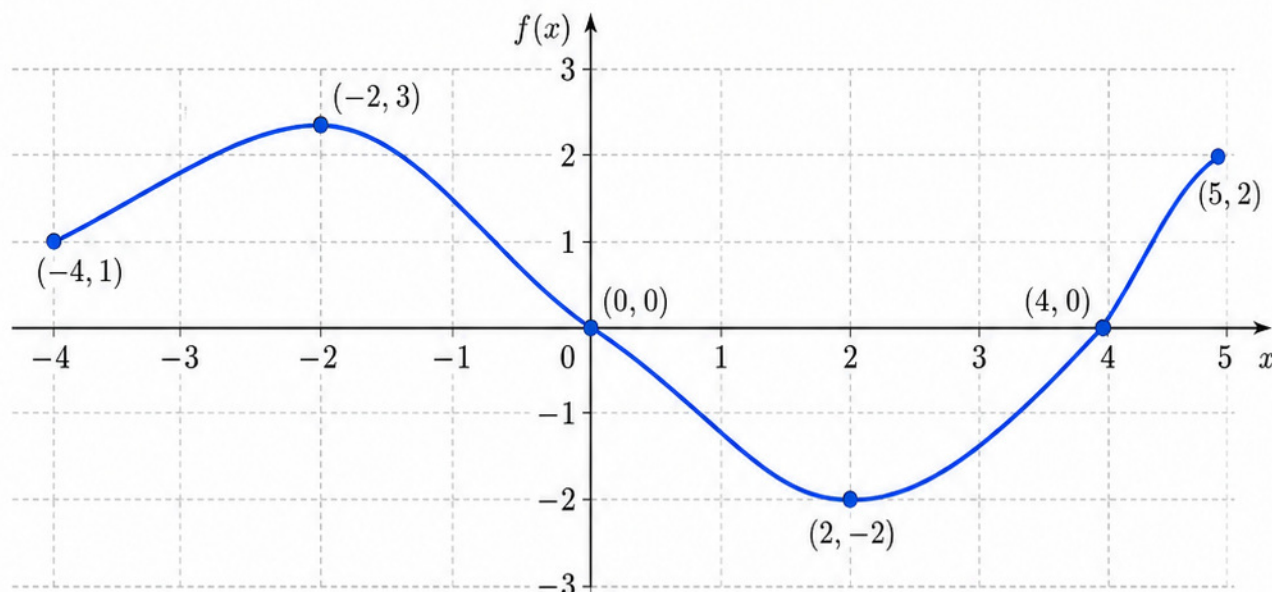
$|x| > a$ — na zewnątrz



Zadanie 08 — Naucz się czytać funkcję z wykresu

Na podstawie przedstawionego wykresu funkcji f określ:

- dziedzinę,
- zbiór wartości,
- miejsca zerowe,
- przedziały monotoniczności,
- największą i najmniejszą wartość na pokazanym przedziale.



2. Dziedzina

Ponieważ wykres istnieje od $x = -4$ do $x = 5$: Funkcja rośnie na $[-4, -2]$ oraz $[2, 5]$

$$D_f = [-4, 5]$$

5. Monotoniczność

Funkcja maleje na $[-2, 2]$

3. Zbiór wartości

Najniższa wartość: -2

Najwyższa wartość: 3

$$W_f = [-2, 3]$$

6. Ekstrema

Lokalne maksimum: $f(-2) = 3$

Lokalne minimum: $f(2) = -2$

4. Miejsca zerowe

$x = 0$

$x = 4$

7. Pole „Jak czytać wykres?”

- Oś pozioma $\rightarrow$ wartości x
- Oś pionowa $\rightarrow$ wartości $f(x)$
- Przecięcie z OX $\rightarrow$ miejsca zerowe
- Wykres idzie w górę $\rightarrow$ funkcja rośnie
- Wykres idzie w dół $\rightarrow$ funkcja maleje
- Najwyższy/najniższy punkt $\rightarrow$ kandydat na ekstremum



Nie mylić $x = 2$ z $f(2) = -2$.

Pierwsze oznacza argument. Drugie oznacza wartość funkcji.

Zadanie 09 — Połącz kilka fundamentów w jednym problemie

Dana jest funkcja:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$$

1. Wyznacz dziedzinę funkcji.
2. Oblicz $f(2)$.
3. Sprawdź, czy $x = -2$ należy do dziedziny.
4. Wyjaśnij, dlaczego $x = 1$ musi zostać wykluczone.

1. Dziedzina

$$x + 2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2$$

$$x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

$$D_f = [-2, 1) \cup (1, +\infty)$$

2. Obliczenie $f(2)$

$$f(2) = \frac{\sqrt{2+2}}{2-1}$$

$$f(2) = \frac{\sqrt{4}}{1}$$

$$f(2) = 2$$

3. Czy $x = -2$ należy do dziedziny?

Tak. $\sqrt{-2+2} = \sqrt{0}$ jest określone, a $-2-1 = -3 \neq 0$.

Zatem -2 należy do dziedziny.

4. Dlaczego $x = 1$ odpada?

Dla $x=1$ mamy $x-1=0$, co prowadzi do dzielenia przez zero.



6. Autokontrola

- Czy pierwiastek może mieć argument równy zero?
- Czy mianownik może być równy zero?
- Czy każdy punkt graniczny przedziału automatycznie należy do dziedziny?

7. Odpowiedzi kontrolne

- Tak.
- Nie.
- Nie — trzeba sprawdzić warunki konkretnego wzoru.

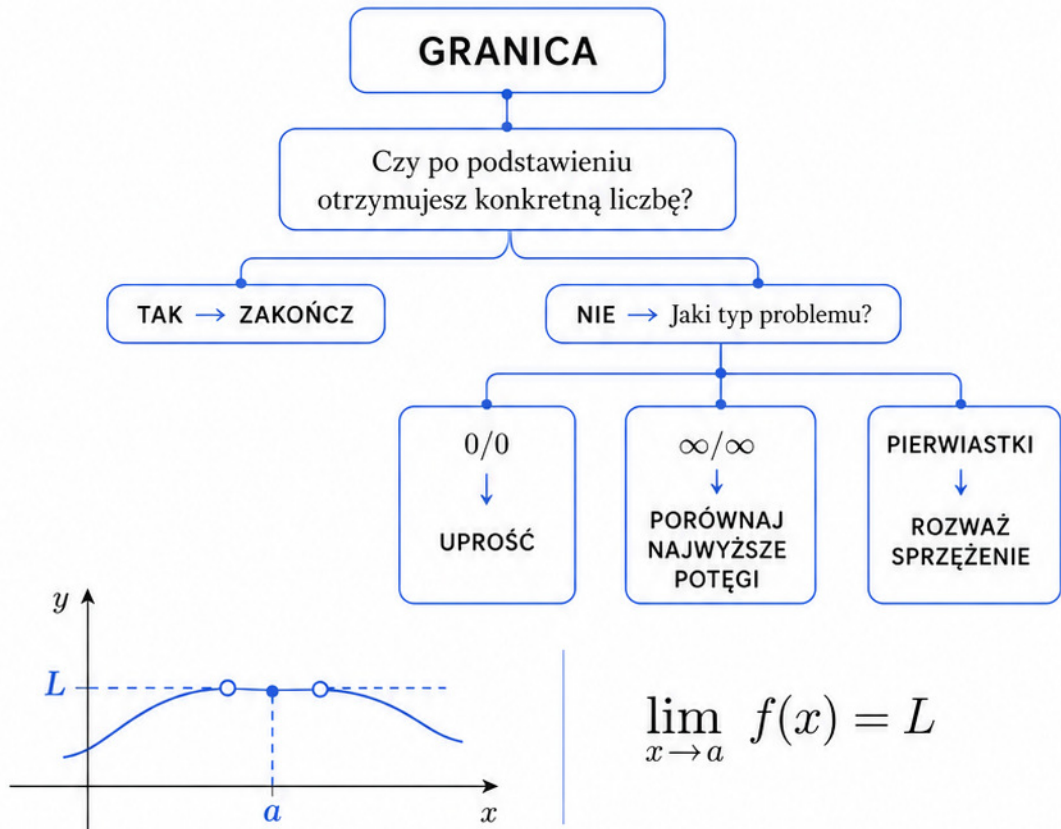


Jeśli potrafisz rozpoznać ograniczenia, rozkładać wyrażenia na czynniki i poprawnie czytać wykres, jesteś gotowy na granice i ciągłość.

Granice i ciągłość

Granica nie pyta wyłącznie o wartość funkcji.

Pyta, do czego funkcja się zbliża.



Cel modułu:

Nauczyć studenta rozpoznawać różne typy granic, wybierać właściwą metodę obliczeń oraz odróżniać granicę od wartości funkcji.



Czytelnik przećwicz:

- bezpośrednie podstawienie,
- postać nieoznaczoną $0/0$,
- rozkład na czynniki,
- usuwanie niewymierności,
- granice w nieskończoności,
- granice jednostronne,
- sprawdzanie ciągłości,
- klasyfikację nieciągłości.



Granica opisuje zachowanie funkcji w pobliżu punktu — niekoniecznie jej wartość dokładnie w tym punkcie.

Zadanie 10 — Zanim szukasz trudnej metody, po prostu podstaw

Oblicz:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 1)$$

1. Pierwsze pytanie

Czy funkcja jest określona i ciągła w punkcie $x = 2$?

Wielomiany są ciągłe dla wszystkich liczb rzeczywistych.

Możemy więc rozpocząć od podstawienia.

2. Podstawienie

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 1) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 1$$

3. Obliczenie

$$\begin{aligned} &= 4 + 6 - 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Odpowiedź: $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 1) = 9$

4. Dlaczego to działa?

Dla funkcji ciągłej w punkcie a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Nie oznacza to jednak, że bezpośrednie podstawienie zawsze wystarczy.

5. Procedura startowa

ZAWSZE ZACZNIJ OD PODSTAWIENIA.

Jeżeli otrzymasz zwykłą liczbę —
najczęściej zadanie jest zakończone.

Jeżeli otrzymasz formę problematyczną,
np. $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$, trzeba zmienić strategię.

6. Drugi przykład

Oblicz: $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - x + 4)$

$$\begin{aligned} &2(-1)^3 - (-1) + 4 \\ &= -2 + 1 + 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

7. Pole „Uwaga!”

BŁĘDNA STRATEGIA	DOBRA STRATEGIA
natychmiast szukać reguły de l'Hospitala, rozkładu, specjalnych wzorów.	najpierw podstaw.

8. Mini-zadanie

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 5)$$

Odpowiedź: 8

Zadanie 11 — 0/0 nie jest odpowiedzią

Oblicz:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

1. Zaczynij od podstawienia

Licznik: $2^2 - 4 = 0$

Mianownik: $2 - 2 = 0$

Otrzymujemy: $\frac{0}{0}$

3. Rozpoznań strukturę

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2$$

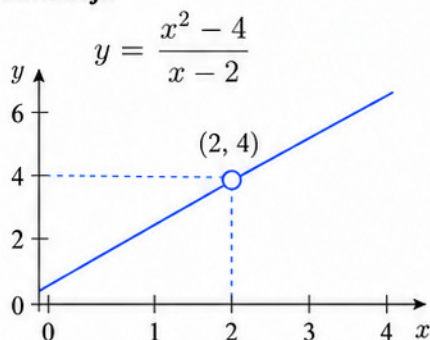
$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

4. Przekształcenie

$$\frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$$

Dla $x \neq 2$: $= x + 2$

7. Wizualizacja



8. Wniosek



Funkcja może nie być określona w punkcie, a jej granica może istnieć.

2. Kluczowy komunikat



0/0 NIE JEST WYNIKIEM.

To postać nieoznaczona.

Informuje nas, że pierwotną postać trzeba uprościć lub zastosować inną właściwą metodę.

5. Teraz policz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

Odpowiedź: 4

6. Dlaczego wolno skrócić $x - 2$?

W granicy $x \rightarrow 2$ interesują nas wartości blisko 2, a nie wyłącznie $x = 2$.

Dla punktów bliskich 2, ale różnych od 2, czynnik $x - 2$ nie jest zerem i można go skrócić.

9. Mini-zadanie

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Odpowiedź kontrolna: 6

Zadanie 12 — Szukaj wspólnego czynnika, który powoduje 0/0

Oblicz:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

1. Podstawienie

$$1^3 - 1 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

Otrzymujemy: $\frac{0}{0}$

2. Rozpoznaj wzór

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Dla $a = x$, $b = 1$ otrzymujemy:

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

3. Podstaw do granicy

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$$

4. Skróć wspólny czynnik

$$\text{Dla } x \neq 1: \quad = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1)$$

5. Podstaw ponownie

$$1^2 + 1 + 1 = 3$$

Odpowiedź: 3

6. Strategia rozpoznawania

$$x^2 - a^2$$

różnica kwadratów

$$x^3 - a^3$$

różnica sześcianów

licznik ma znane
miejsce zerowe

sprawdź możliwość
wyłączenia czynnika
 $(x - a)$

7. Dlaczego rozkład jest tak ważny?

Przy granicach typu 0/0 często problemem nie jest sama granica, lecz ukryty wspólny czynnik w liczniku i mianowniku.

8. Mini-zadanie

$$\text{Oblicz: } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$$

$$\text{Podpowiedź: } x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

$$\text{Po skróceniu: } x + 1$$

$$\text{Odpowiedź: } -1$$

9. Pole „Sprawdź siebie”

Jaki czynnik chcę znaleźć w liczniku?

Odpowiedź: Taki sam, jaki zeruje mianownik.

Zadanie 13 — Gdy pojawia się pierwiastek, pomyśl o wyrażeniu sprzężonym

Oblicz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

1. Bezpośrednie podstawienie

$$\sqrt{4} - 2 = 0$$

Mianownik: 0

Otrzymujemy: $\frac{0}{0}$

2. Problem

W liczniku znajduje się różnica zawierająca pierwiastek. Nie można jej rozłożyć klasycznymi metodami tak łatwo jak wielomianu.

3. Wyrażenie sprzężone

Dla $\sqrt{x+4} - 2$ wyrażeniem sprzężonym jest $\sqrt{x+4} + 2$

4. Pomnóż licznik i mianownik

$$\frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2}$$

5. Użyj wzoru

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(\sqrt{x+4})^2 - 2^2 = x + 4 - 4 = x$$

$$\text{Otrzymujemy: } \frac{x}{x(\sqrt{x+4} + 2)}$$

6. Skróć x

$$\text{Dla } x \neq 0: = \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2}$$

7. Podstaw ponownie

$$\frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

8. Co właściwie zrobiło sprzężenie?

Sprzężenie usuwa różnicę pierwiastków dzięki wzorowi $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

W ten sposób często ujawnia się czynnik, który można skrócić.

9. Strategia

Jeżeli masz $\frac{0}{0}$ oraz różnicę pierwiastków, sprawdź wyrażenie sprzężone.

10. Mini-zadanie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

Odpowiedź kontrolna: $\frac{1}{2}$

11. Element wizualny

$$\sqrt{A} - B$$



$$\sqrt{A} + B$$

sprzężenie = zmiana znaku między składnikami

Zadanie 14 — Przy bardzo dużych x liczą się najwyższe potęgi

Oblicz:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 + 5x - 4}$$

1. Intuicja

Dla bardzo dużych wartości x , x^2 rośnie znacznie szybciej niż x oraz stałe.

Dlatego najważniejsze stają się składniki z najwyższą potęgą.

2. Metoda formalna

Podziel licznik i mianownik przez x^2

$$\frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2}}$$

3. Granice składników

Gdy $x \rightarrow +\infty$, to $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ oraz $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$

4. Podstaw graniczne wartości

Licznik: $3 - 0 + 0 = 3$

Mianownik: $1 + 0 - 0 = 1$

$$\frac{3}{1} = 3$$

Odpowiedź: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 + 5x - 4} = 3$

6. Przykład porównawczy A

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x^2 + 3} = 0$$

Stopień licznika: 1, stopień mianownika: 2

8. Pułapka



Nie podstawiaj mechanicznie symbolu ∞ tak, jakby był zwykłą liczbą.
 ∞ opisuje sposób zachowania argumentu, a nie konkretną wartość liczbową.

9. Mini-zadanie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3}{2x^2 - x + 8}$$

Odpowiedź kontrolna: $\frac{7}{2}$

5. Reguła szybkiego rozpoznania

Dla funkcji wymiernej $\frac{P(x)}{Q(x)}$ porównaj stopnie wielomianów.



STOPIEŃ LICZNIKA
< STOPIEŃ MIANOWNIKA
→ 0



STOPIEŃ LICZNIKA
= STOPIEŃ MIANOWNIKA
→ iloraz współczynników



STOPIEŃ LICZNIKA
> STOPIEŃ MIANOWNIKA
→ zbadaj wzrost i znak

7. Przykład porównawczy B

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 1}{2x^3 + x} = \frac{5}{2}$$

Stopnie równe.

Zadanie 15 — Z której strony zbliżasz się do punktu?

Dana jest funkcja: $f(x) = \frac{1}{x-2}$. Oblicz: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

1. Co oznacza zapis?

- $x \rightarrow 2^-$ oznacza zbliżanie się do 2 z wartości mniejszych od 2.
- $x \rightarrow 2^+$ oznacza zbliżanie się do 2 z wartości większych od 2.

2. Granica lewostronna

Rozpatrzmy wartości $x < 2$.

Wtedy $x - 2 < 0$ — mianownik jest bardzo małą liczbą ujemną (zbliża się do 0 z lewej strony).

Licznik jest równy 1, więc wyrażenie $\frac{1}{x-2}$ przyjmuje coraz mniejsze wartości (ujemne), dążąc do $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

3. Granica prawostronna

Rozpatrzmy wartości $x > 2$.

Wtedy $x - 2 > 0$ — mianownik jest bardzo małą liczbą dodatnią (zbliża się do 0 z prawej strony).

Licznik jest równy 1, więc wyrażenie $\frac{1}{x-2}$ przyjmuje coraz większe wartości (dodatnie), dążąc do $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

4. Czy granica obustronna istnieje?

Granica obustronna $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy granica lewostronna i prawostronna są równe.

W naszym przypadku:

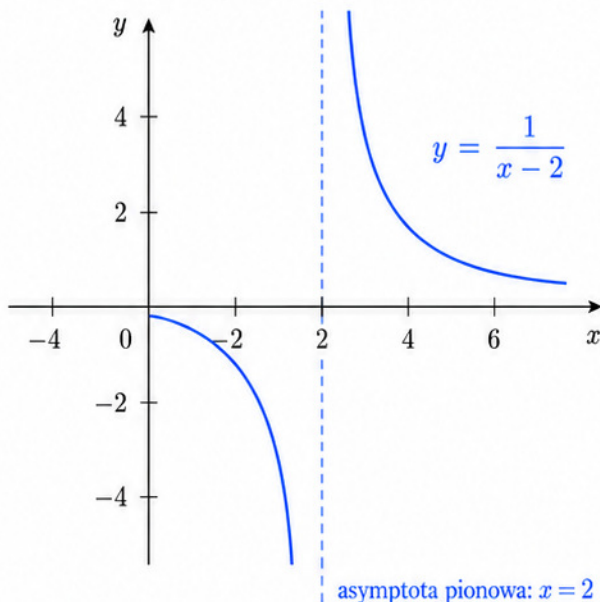
$$-\infty \neq +\infty$$

Zatem granica obustronna nie istnieje.



Funkcja $f(x) = \frac{1}{x-2}$ nie ma granicy w punkcie $x = 2$.

5. Wizualizacja



6. Pole „Strategia”

Aby zbadać granicę miejscową funkcji w punkcie:

1. Ustal stronę zbliżania: $x \rightarrow a^-$ lub $x \rightarrow a^+$.
2. Sprawdź znak licznika.
3. Sprawdź znak mianownika w pobliżu punktu.
4. Oceń, czy wyrażenie dąży do $+\infty$ czy $-\infty$.

7. Mini-zadanie

Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}.$$

Odpowiedź kontrolna:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Zadanie 16 — Kiedy funkcja jest ciągła w punkcie?

Sprawdź, czy funkcja $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ jest ciągła w punkcie $x = 1$.

1. Warunki ciągłości

Funkcja f jest ciągła w punkcie a , jeśli spełnione są trzy warunki:

- 1 $f(a)$ istnieje,
- 2 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ istnieje,
- 3 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Wszystkie trzy warunki muszą być spełnione jednocześnie.

2. Sprawdź wartość funkcji

Podstawiamy $x = 1$ do funkcji:

$$f(1) = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

! Otrzymujemy $\frac{0}{0}$, więc funkcja nie jest określona w punkcie $x = 1$.
Warunek 1 nie jest spełniony.

3. Sprawdź granicę

Rozkładamy licznik:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Dla $x \neq 1$ możemy skrócić przez $x - 1$:

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \quad \text{dla } x \neq 1$$

Obliczamy granicę:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Granica istnieje i jest równa 2.

Warunek 2 jest spełniony.

4. Wniosek

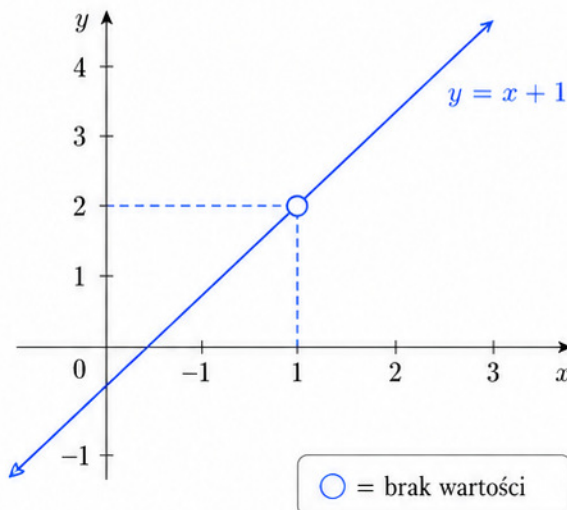
Funkcja $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ nie jest ciągła w punkcie $x = 1$, ponieważ $f(1)$ nie istnieje (warunek 1 nie jest spełniony). Mimo że $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ istnieje, brak wartości funkcji uniemożliwia spełnienie wszystkich warunków ciągłości.

5. Typ nieciągłości

Ponieważ granica w punkcie $x = 1$ istnieje, ale funkcja nie jest w tym punkcie określona, mamy nieciągłość usuwalną.

Gdybyśmy zdefiniowali $f(1) = 2$, funkcja byłaby ciągła w $x = 1$.

6. Wizualizacja



○ = brak wartości

7. Algorytm ciągłości



KROK 1

Policz $f(a)$.

KROK 2

Policz $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

KROK 3

Porównaj wyniki.

Funkcja jest ciągła w a tylko wtedy, gdy wszystkie trzy warunki są spełnione.

8. Mini-zadanie

Sprawdź, czy funkcja $g(x) = x^2 + 1$ jest ciągła w punkcie $x = 3$.

Odpowiedź:

Tak, funkcja jest ciągła w $x = 3$.

Funkcje wielomianowe są ciągłe w każdym punkcie, więc:

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 1) = 3^2 + 1 = 10$$

oraz $g(3) = 3^2 + 1 = 10$.

Granica istnieje i jest równa wartości funkcji:

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3) = 10.$$

Zadanie 17 — Rozpoznaj, co dzieje się z funkcją w problematycznym punkcie

1. Typ A — nieciągłość usuwalna

Przykład:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{dla } x \neq 1.$$

Uprośćmy:

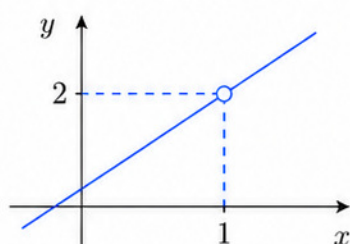
$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

dla $x \neq 1$.

Granica istnieje:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2,$$

ale funkcja nie ma wartości w $x = 1$.



Interpretacja:

Występuje „dziura” w wykresie.

Problem można usunąć, definiując w tym punkcie odpowiednią wartość.

2. Typ B — nieciągłość skokowa

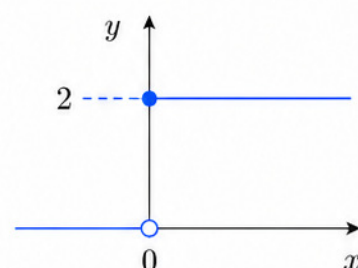
Przykład:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 2 & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

Granice jednostronne:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$



Interpretacja:

Granice jednostronne są różne (obie skończone). Funkcja „skacze” w punkcie.

3. Typ C — nieciągłość nieskończona

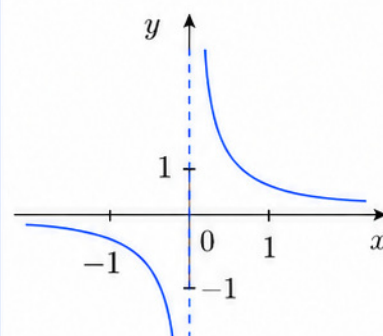
Przykład:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{w otoczeniu } x = 0.$$

Granice jednostronne:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$



Interpretacja:

Funkcja dąży do $\pm\infty$ przy zbliżaniu się do punktu. Pojawia się asymptota pionowa.

4. Tabela porównawcza

Typ	Granica obustronna	Zachowanie
Usuwalna	istnieje	dziura
Skokowa	nie istnieje	różne granice jednostronne
Nieskończona	nie istnieje jako liczba skończona	asymptota pionowa

5. Strategia rozpoznawania

- 1 Czy granice jednostronne są równe?
- 2 **Jeśli tak:** sprawdź, czy $f(a)$ istnieje i czy $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
- 3 **Jeśli nie:** sprawdź, czy wartości są skończone (skok) czy nieskończone (asymptota pionowa).

6. Mini-zadanie diagnostyczne

Dana jest funkcja spełniająca warunki:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 5, \quad \text{ale } f(3) = 1.$$

Jaki typ nieciągłości występuje w $x = 3$?

Odpowiedź: nieciągłość usuwalna.

7. Nie zapamiętuj obrazka bez reguły

- !** Typ nieciągłości wynika z relacji między:
- granicą lewostronną $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$,
 - granicą prawostronną $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$,
 - wartością funkcji $f(a)$.

To one decydują o zachowaniu funkcji w problematycznym punkcie.

Zadanie 18 — Granica, wartość funkcji i ciągłość w jednym przykładzie

Dana jest funkcja: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ dla $x \neq 2$ oraz $f(2) = 5$.

Odpowiedz:

1. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
2. Podaj $f(2)$.
3. Sprawdź ciągłość w $x = 2$.
4. Określ typ nieciągłości.
5. Jaką wartość należałoby przypisać $f(2)$, aby funkcja była ciągła?

1. Obliczenie granicy

Dla $x \neq 2$ rozłóż licznik:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Uprość funkcję:

$$f(x) = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2 \quad \text{dla } x \neq 2$$

Oblicz granicę:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

Odpowiedź: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

2. Wartość funkcji

Z definicji funkcji:

Odpowiedź: $f(2) = 5$

3. Porównanie

Granica w punkcie $x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

Wartość funkcji w punkcie $x = 2$: $f(2) = 5$

Granica $\neq$ wartość funkcji.

Wniosek: funkcja nie jest ciągła w punkcie $x = 2$.

4. Typ nieciągłości

Granica istnieje i jest skończona (równa 4),
ale wartość funkcji w punkcie jest inna (5).

To jest **nieciągłość usuwalna**.

5. Jak naprawić funkcję?

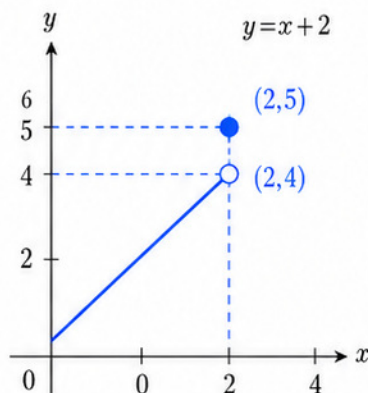
Aby funkcja była ciągła w $x = 2$, należy ustawić:

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4.$$

Wtedy: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 4$,

czyli funkcja będzie ciągła w tym punkcie.

6. Wizualizacja



→ przenieś wartość do (2, 4)

7. Mapa modułu

PODSTAWIENIE
podstaw wartość

LICZBA?
jeśli tak → zakończ

0/0?
jeśli tak → uprość

PIERWIASTEK?
jeśli tak → sprzężenie

NIESKOŃCZONOŚĆ?
jeśli tak → porównaj
dominujące potęgi

PUNKT PROBLEMATYCZNY?
jeśli tak → sprawdź
granice jednostronne
i ciągłość

8. Autokontrola

1. Czy $\frac{0}{0}$ jest wynikiem?
2. Czy funkcja musi istnieć w punkcie, aby jej granica tam istniała?
3. Kiedy istnieje granica obustronna?

9. Odpowiedzi kontrolne

1. Nie.
2. Nie.
3. Gdy granica lewostronna i prawostronna istnieją i są równe.

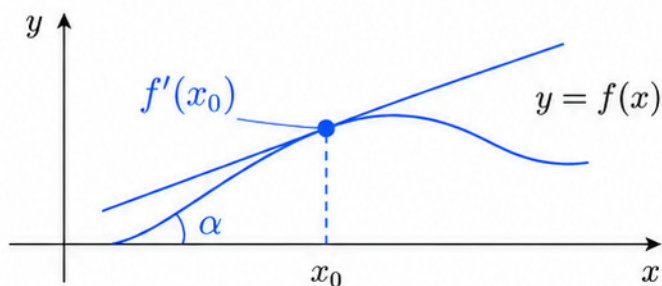
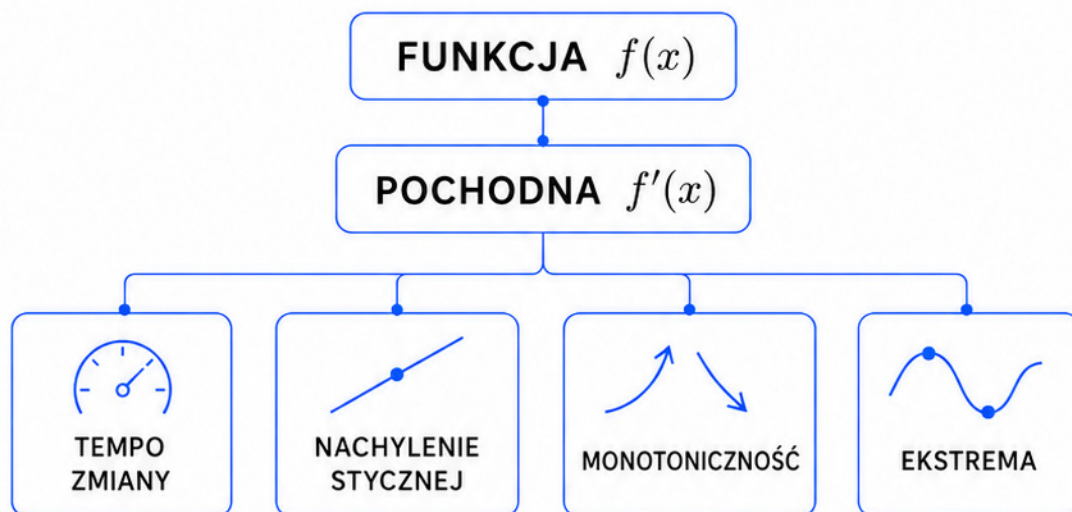
10. Podsumowanie kluczowe



Granica opisuje zachowanie.
Ciągłość porównuje
zachowanie z rzeczywistą
wartością funkcji.

Pochodne

Pochodna mówi, jak szybko zmienia się funkcja — i w którą stronę.



Cel modułu:

Nauczyć studenta obliczać pochodne, rozpoznawać właściwe reguły różniczkowania oraz wykorzystywać pochodną do analizy funkcji.



Czytelnik przećwicz:

- pochodną z definicji,
- podstawowe wzory,
- regułę iloczynu,
- regułę ilorazu,
- regułę łańcuchową,
- pochodne funkcji szczególnych,
- równania stycznej i normalnej,
- monotoniczność i ekstrema,
- pełne badanie przebiegu zmienności funkcji.



Pochodna w punkcie opisuje nachylenie stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie.

Zadanie 19 — Skąd właściwie bierze się pochodna?

Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^2$.

1. Definicja

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- h to bardzo mała zmiana argumentu.
- Licznik to zmiana wartości funkcji.
- Iloraz to średnie tempo zmiany.
- Granica daje tempo zmiany w danym punkcie (chwilowe).

2. Podstaw funkcję

Dla $f(x) = x^2$ mamy:

$$f(x+h) = (x+h)^2$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

3. Rozwiń kwadrat

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

4. Uprość licznik

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

5. Wyłącz h

$$2xh + h^2 = h(2x + h)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} \quad (h \neq 0)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h)$$

6. Oblicz granicę

Gdy $h \rightarrow 0$, to $2x + h \rightarrow 2x$.

Zatem

$$\text{Odpowiedź: } f'(x) = 2x$$

7. Co oznacza wynik?

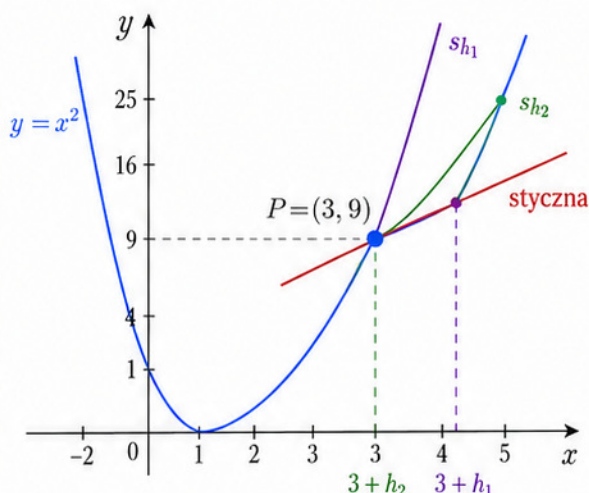
Dla $x = 3$:

$$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

Nachylenie stycznej do paraboli $y = x^2$ w punkcie o współrzędnej $x = 3$ wynosi 6.

8. Wizualizacja

Na wykresie widzimy, jak sieczne zbliżają się do stycznej w punkcie $P = (3, 9)$.



SECANT

→

h maleje

→

STYCZNA

9. Najważniejszy sens



Pochodna to granica ilorazu zmian:

$$\frac{\text{zmiana } y}{\text{zmiana } x}$$

gdy zmiana x staje się bardzo mała.

Wtedy mówimy o chwilowej szybkości zmian.

10. Mini-zadanie

Korzystając z definicji, spróbuj uzasadnić:

$$\frac{d}{dx}(3x) = 3$$

Zadanie 20 — Rozpoznaj wzór i różniczkuj składnik po składniku

Oblicz pochodną:

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 7$$

1. Wzór podstawowy

Jeżeli $f(x) = x^n$, to
pochodna wynosi $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

2. Reguły pomocnicze

- $\frac{d}{dx}(c) = 0$ (c — stała)
- $\frac{d}{dx}[c \cdot f(x)] = c \cdot f'(x)$ (c — stała)
- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

3. Różniczkuj każdy składnik

$$\frac{d}{dx}(4x^3) = 4 \cdot 3x^{3-1} = 12x^2$$

$$\frac{d}{dx}(-5x^2) = -5 \cdot 2x^{2-1} = -10x$$

$$\frac{d}{dx}(2x) = 2 \cdot 1x^{1-1} = 2$$

$$\frac{d}{dx}(-7) = 0$$

4. Złóż wynik

Sumujemy pochodne składników:

$$f'(x) = 12x^2 - 10x + 2$$

5. Wizualizacja procesu

$4x^3$	$\rightarrow$	$12x^2$
$-5x^2$	$\rightarrow$	$-10x$
$2x$	$\rightarrow$	2
-7	$\rightarrow$	0

6. Dlaczego wykładnik maleje o 1?



Reguła potęgowa wynika z definicji pochodnej i działa jak praktyczny algorytm: wykładnik schodzi przed x , a następnie zmniejsza się o 1.

7. Ważne wyjątki intuicyjne

- $\frac{d}{dx}(x) = 1$, ponieważ $x = x^1$, więc $1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$.
- $\frac{d}{dx}(1) = 0$ (pochodna stałej to zero).

8. Mini-zadanie

Oblicz pochodną funkcji $g(x) = 3x^4 - 2x + 6$.

Rozwiązanie:

$$g'(x) = 3 \cdot 4x^{4-1} - 2 \cdot 1x^{1-1} + 0$$

$$g'(x) = 12x^3 - 2$$

9. Pułapka



Częsty błąd: $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^3$ ✗

Poprawnie: $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$ ✓

Pamiętaj: wykładnik musi zawsze zmniejszyć się o 1!

Zadanie 21 — Gdy funkcje są mnożone lub dzielone, potrzebujesz nowej reguły

A. Zadanie główne A

Oblicz pochodną $f(x) = x^2 \cdot \sin x$.

1. Reguła iloczynu

Jeśli $f(x) = u(x)v(x)$, to

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

2. Wybierz funkcje

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 & v(x) &= \sin x \\ u'(x) &= 2x & v'(x) &= \cos x \end{aligned}$$

3. Podstaw do wzoru

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x \end{aligned}$$

4. Odpowiedź A

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

5. Pułapka



Błędnie:

$$(uv)' = u'v'$$



Poprawnie:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Iloczyn pochodnych to nie pochodna iloczynu.

Zawsze pamiętaj: $(uv)' \neq u'v'$.

B. Zadanie główne B

Oblicz pochodną $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

6. Reguła ilorazu

Jeśli $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ oraz $v(x) \neq 0$, to

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

7. Wybierz elementy

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 + 1 & u'(x) &= 2x \\ v(x) &= x & v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

8. Podstaw

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 1) \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \end{aligned}$$

9. Odpowiedź B

$$g'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} \quad \text{dla } x \neq 0$$

10. Alternatywna metoda

$$\frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{Stąd: } g'(x) &= \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \end{aligned}$$

Obie metody dają ten sam wynik.

11. Wniosek strategiczny



Jeśli iloraz można łatwo uprościć przed różniczkowaniem, często warto to zrobić.

12. Mini-zadanie

Oblicz pochodną $h(x) = x \cdot e^x$.

$$\text{Odpowiedź: } h'(x) = e^x + xe^x$$

Zadanie 22 — Funkcja w funkcji: różniczkuj od zewnątrz do środka

Oblicz pochodną:

$$f(x) = (3x^2 + 1)^5$$

1. Rozpoznanie struktury

Mamy funkcję złożoną.

Funkcja zewnętrzna to u^5 , a funkcja wewnętrzna to $u = 3x^2 + 1$.

2. Reguła łańcuchowa

Jeśli $f(x) = F(g(x))$, to

$$f'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Pochodna zewnętrznej razy pochodna wewnętrznej.

3. Pochodna funkcji zewnętrznej

Funkcja zewnętrzna: u^5

$$\frac{d}{du} u^5 = 5u^4$$

Po podstawieniu z powrotem $u = 3x^2 + 1$:

$$F'(3x^2 + 1) = 5(3x^2 + 1)^4$$

4. Pochodna funkcji wewnętrznej

Funkcja zewnętrzna: $u = 3x^2 + 1$

$$\frac{d}{dx} (3x^2 + 1) = 6x$$

5. Pomnóż

Z reguły łańcuchowej:

$$f'(x) = 5(3x^2 + 1)^4 \cdot 6x$$

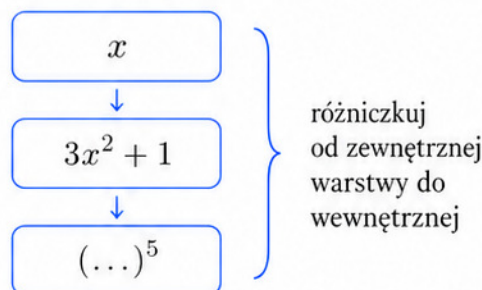
6. Uprość

Porządkujemy mnożenie:

$$f'(x) = 30x(3x^2 + 1)^4$$

$$\text{Odpowiedź: } f'(x) = 30x(3x^2 + 1)^4$$

7. Wizualizacja warstw



8. Drugi mikroprzykład

Weźmy $g(x) = \sin(2x)$.

- Funkcja zewnętrzna: $\sin u \rightarrow \cos u$
- Funkcja wewnętrzna: $u = 2x \rightarrow 2$

Zatem:

$$g'(x) = \cos(2x) \cdot 2 = 2 \cos(2x)$$

$$\text{Odpowiedź: } g'(x) = 2 \cos(2x)$$

9. Trzeci mikroprzykład

Weźmy $h(x) = \sqrt{x^2 + 4} = (x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}$.

- Funkcja zewnętrzna: $u^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$
- Funkcja wewnętrzna: $u = x^2 + 4 \rightarrow 2x$

Zatem:

$$h'(x) = \frac{1}{2} (x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$\text{Odpowiedź: } h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

10. Pułapka



Dla wyrażenia $(3x^2 + 1)^5$ nie wystarczy napisać $5(3x^2 + 1)^4$.

Brakuje czynnika $\cdot 6x$ pochodzącego z pochodnej funkcji wewnętrznej $3x^2 + 1$.

11. Mini-zadanie

Oblicz pochodną funkcji $y = (x^3 - 2)^4$.

Rozwiązanie:

Zewnętrzna: $u^4 \rightarrow 4u^3$

Wewnętrzna: $u = x^3 - 2 \rightarrow 3x^2$

$$y' = 4(x^3 - 2)^3 \cdot 3x^2 = 12x^2(x^3 - 2)^3$$

$$\text{Odpowiedź: } y' = 12x^2(x^3 - 2)^3$$

Zadanie 23 — Wzory szczególne, które trzeba rozpoznawać natychmiast

1. Karta wzorów podstawowych

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{dla } x > 0$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\text{opcjonalnie})$$

2. Zadanie A

Dane: $f(x) = 3 \sin x - 2 \cos x$

Różniczkujemy składnik po składniku:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3 \sin x)' - (2 \cos x)' \\ &= 3 \cos x - 2(-\sin x) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 3 \cos x + 2 \sin x$$

Wyjaśnienie znaku: pochodna z $-2 \cos x$ to $-2 \cdot (-\sin x) = +2 \sin x$.

3. Zadanie B

Dane: $g(x) = e^{2x}$

Rozpoznajemy regułę łańcuchową:

- na zewnątrz mamy $e^u \rightarrow$ pochodna to e^u ,
- wewnątrz $u = 2x \rightarrow$ pochodna to 2.

Zatem:

$$g'(x) = 2e^{2x}$$

4. Zadanie C

Dane: $h(x) = \ln(x^2 + 1)$

Reguła łańcuchowa:

- na zewnątrz mamy $\ln u \rightarrow$ pochodna to $\frac{1}{u}$,
- wewnątrz $u = x^2 + 1 \rightarrow$ pochodna to $2x$.

Zatem:

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

5. Strategia

Widzisz	Pierwsza reakcja
$\sin(\dots)$	$\cos(\dots) \times$ pochodna środka
$\cos(\dots)$	$-\sin(\dots) \times$ pochodna środka
$e^{(\dots)}$	$e^{(\dots)} \times$ pochodna wykładnika
$\ln(\dots)$	$\frac{1}{(\dots)} \times$ pochodna środka

6. Dlaczego nawias jest ważny?

Bez nawiasu: $(\sin x)' = \cos x$

Z nawiasem: $(\sin 3x)' = 3 \cos 3x$

Ten dodatkowy współczynnik 3 pochodzi z reguły łańcuchowej: pochodna środka ($3x$) to 3.

7. Pułapka logarytmiczna



Dla $h(x) = \ln(x^2 + 1)$

BŁĄD (częsty): $\frac{1}{x^2 + 1}$

POPRAWNIE: $\frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x$

8. Mini-zadanie 1

$$p(x) = \cos(5x)$$

$$p'(x) = -5 \sin(5x)$$

9. Mini-zadanie 2

$$q(x) = e^{x^2}$$

$$q'(x) = 2x e^{x^2}$$

10. Mini-zadanie 3

$$r(x) = \ln(3x + 1) \quad r'(x) = \frac{3}{3x + 1}$$

11. Twoja karta decyzyjna

CO JEST NA ZEWNĄTRZ?

ZRÓŻNICZKUJ

NIE ZAPOMNIJ O ŚRODKU

Zadanie 24 — Pochodna jako nachylenie prostej

Dla funkcji $f(x) = x^2$ znajdź równanie stycznej i normalnej do wykresu w punkcie odpowiadającym $x_0 = 1$.



Cel dydaktyczny: utrwalić interpretację pochodnej jako nachylenia stycznej oraz umiejętność wyznaczania równań stycznej i normalnej.

1. Znajdź punkt na wykresie

$$x_0 = 1$$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

Punkt styczności: $P = (1, 1)$

2. Wyznacz pochodną i nachylenie stycznej

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

Nachylenie stycznej: $m_s = f'(1) = 2$

3. Równanie stycznej

Korzystamy ze wzoru punkt–nachylenie: $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y - 1 = 2x - 2$$

$$y = 2x - 1$$

Odpowiedź: równanie stycznej: $y = 2x - 1$

4. Równanie normalnej

Normalna jest prostopadła do stycznej.

$$\text{Nachylenie normalnej: } m_n = -\frac{1}{m_s} = -\frac{1}{2}$$

Równanie (wzór punkt–nachylenie):

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

Po uproszczeniu (opcjonalnie):

$$y - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Odpowiedź: równanie normalnej: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

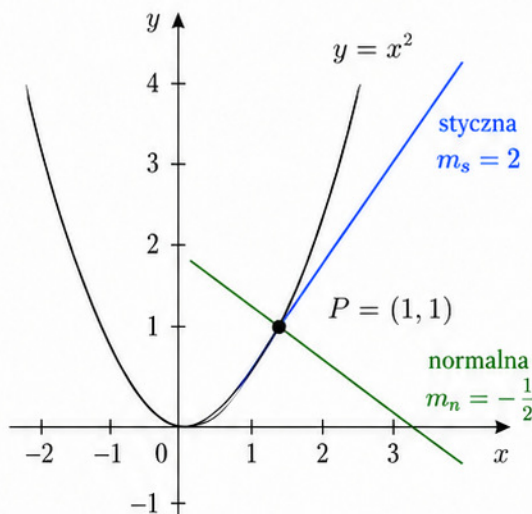
5. Dlaczego współczynniki są ze sobą związane?

Proste prostopadłe mają nachylenia m_1 i m_2 , które spełniają:

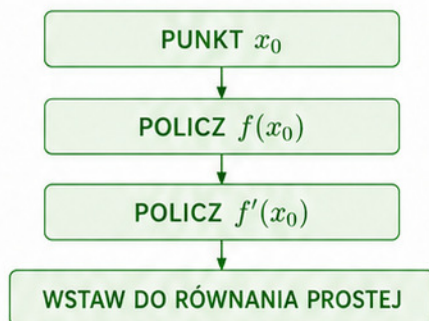
$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Stąd, jeśli $m_s \neq 0$, to $m_n = -\frac{1}{m_s}$.

6. Wizualizacja



7. Strategia — krok po kroku



8. Pułapka — czego unikać?



Nie używaj $f'(x)$ „sam z siebie”.

Aby wyznaczyć styczną w punkcie x_0 , potrzebujemy konkretnej wartości pochodnej $f'(x_0)$.

9. Mini-zadanie

Dla $f(x) = x^3$ znajdź nachylenie stycznej w punkcie odpowiadającym $x = 2$.

Rozwiązanie:

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$$

Odpowiedź: nachylenie stycznej $m = 12$

Zadanie 25 — Znak pochodnej mówi, czy funkcja rośnie czy maleje



Cel zadania:

Zbadać monotoniczność funkcji $f(x) = x^3 - 3x$ i wyznaczyć jej ekstrema lokalne.

1. Obliczamy pochodną

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

2. Wyznaczamy punkty krytyczne

Punkty krytyczne to rozwiązania równania $f'(x) = 0$:

$$3(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ lub } x = 1$$

Punkty krytyczne: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

3. Dzielimy oś liczbową

Punkty krytyczne dzielą oś liczbową na przedziały:

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 1), \quad (1, +\infty).$$

4. Badamy znak pochodnej

Przedział	Znak $f'(x)$	Zachowanie f
$x < -1$ $(-\infty, -1)$	+	rośnie
$-1 < x < 1$ $(-1, 1)$	-	maleje
$x > 1$ $(1, +\infty)$	+	rośnie

5. Wnioski o ekstremach

W punkcie $x = -1$ pochodna zmienia znak z $+$ na $-$, więc funkcja ma **maksimum lokalne**.

W punkcie $x = 1$ pochodna zmienia znak z $-$ na $+$, więc funkcja ma **minimum lokalne**.

6. Wyznaczamy wartości w punktach krytycznych

$$\bullet f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$$

Maksimum lokalne: $(-1, 2)$.

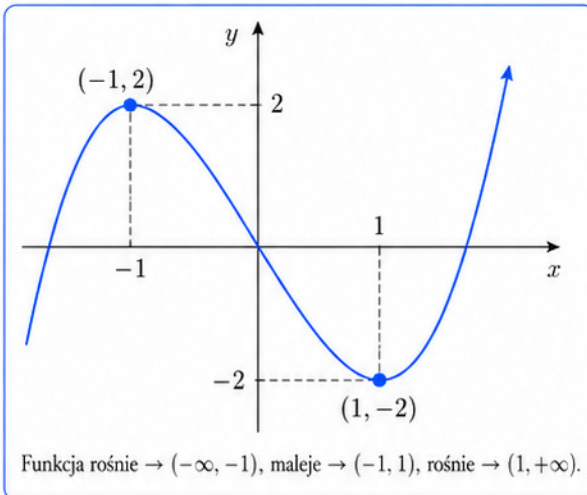
$$\bullet f(1) = 1^3 - 3(1) = 1 - 3 = -2$$

Minimum lokalne: $(1, -2)$.

7. Zasada kluczowa

$f'(x) > 0$	funkcja rośnie (wykres idzie w górę)
$f'(x) < 0$	funkcja maleje (wykres idzie w dół)
$f'(x) = 0$	punkt trzeba zbadać — nie zawsze jest to ekstremum

8. Wizualizacja



9. Pułapka (na co uważać!)



Nie zapisuj automatycznie: $f'(a) = 0 \Rightarrow$ ekstremum!

Przykład kontrprzykładu:

$$f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2$$

$$f'(0) = 0,$$

ale w punkcie $x = 0$ funkcja nie ma ani maksimum, ani minimum (rosa zarówno przed, jak i za punktem).

10. Mini-zadanie

Dla $g(x) = x^2 - 4x + 1$ zbadaj jedno ekstremum lokalne.

$$\bullet g'(x) = 2x - 4$$

$$\bullet g'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

(punkt krytyczny)

• Znak pochodnej:

– dla $x < 2$, + dla $x > 2$ (zmiana z $-$ na $+$)

• Wniosek: w punkcie $x = 2$ funkcja ma minimum lokalne.

$$\bullet \text{Wartość: } g(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$$

Minimum lokalne: $(2, -3)$.

Zadanie 26 — Zbuduj obraz funkcji z samych obliczeń



Cel dydaktyczny:

Przeanalizować przebieg funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2$ wykorzystując pochodną i wyciągnąć wnioski o wykresie.

1. Dziedzina

Funkcja jest wielomianowa, więc jest określona dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

$$D_f = \mathbb{R}$$

2. Miejsca zerowe

$$x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x - 3) = 0$$

$$\text{Stąd: } x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 3.$$

3. Pochodna

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

4. Punkty krytyczne (z równania $f'(x) = 0$)

$$3x(x - 2) = 0 \implies x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 2$$

5. Znak pochodnej i monotoniczność

Rozpatrujemy przedziały: $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, +\infty)$.

Przedział	Znak f'	Funkcja
$x < 0$	+	rośnie
$0 < x < 2$	-	maleje
$x > 2$	+	rośnie

6. Ekstrema

- W punkcie $x = 0$ znak f' zmienia się z + na -, zatem jest to *maksimum lokalne*.

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0 \implies \text{punkt } (0, 0).$$

- W punkcie $x = 2$ znak f' zmienia się z - na +, zatem jest to *minimum lokalne*.

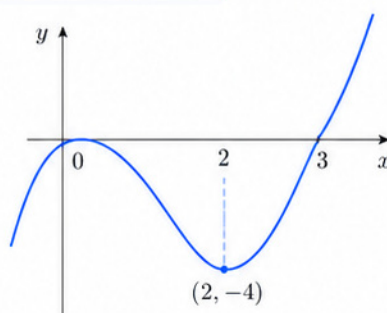
$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4 \implies \text{punkt } (2, -4).$$

7. Tabela przebiegu (graficzny obraz znaków i zachowania)

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$	maks. (0, 0)	$\searrow$	min. (2, -4)	$\nearrow$

8. Szkic wykresu

Wykres przechodzi przez punkt $(0, 0)$ (maksimum lokalne). Następnie funkcja maleje do minimum lokalnego w punkcie $(2, -4)$, po czym znów rośnie i przecina oś OX w punkcie $x = 3$.



9. Algorytm analizy (checklista)

- ☒ 1. Dziedzina funkcji
- ☒ 2. Miejsca zerowe
- ☒ 3. Pochodna
- ☒ 4. Punkty krytyczne (z równania $f'(x) = 0$)
- ☒ 5. Znak pochodnej (na przedziałach)
- ☒ 6. Monotoniczność funkcji
- ☒ 7. Ekstrema (wartości i punkty)
- ☒ 8. Szkic wykresu

10. Uwaga – rozwinięcie tematu



W bardziej rozbudowanych zadaniach można dodatkowo analizować:

- granice funkcji na krańcach dziedziny,
- asymptoty,
- drugą pochodną,
- wklęsłość i wypukłość wykresu,
- punkty przegięcia.

W tym zadaniu **nie rozwijamy** tych zagadnień.

Pomocne przypomnienie

Aby zbudować obraz funkcji z samych obliczeń, opieramy się na pochodnej:

- znak f' mówi, czy funkcja rośnie czy maleje,
- punkty, w których $f' = 0$ – to punkty mogące być ekstremami,
- zmiana znaku f' pozwala określić typ ekstremum,
- szkic rysujemy w oparciu o wszystkie wyciągnięte wnioski.

Zadanie 27 – Od wzoru do pełnej informacji o funkcji



Zadanie główne: Dla funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 3$ wykonaj poniższe polecenia:

- 1) oblicz pochodną, 2) znajdź punkt krytyczny, 3) określ monotoniczność, 4) znajdź ekstremum, 5) wyznacz równanie stycznej w punkcie $x = 1$.

Cel dydaktyczny: Przejdź krok po kroku od wzoru funkcji do pełnej informacji o jej zachowaniu i zastosowaniach geometrycznych.

1. Pochodna funkcji

$$f'(x) = 2x - 4$$

2. Punkt krytyczny

Szukamy miejsc zerowych pochodnej:

$$2x - 4 = 0$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Punkt krytyczny: $x = 2$.

3. Monotoniczność

- Dla $x < 2$:
np. $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2 < 0$
Funkcja maleje na $(-\infty, 2)$.
- Dla $x > 2$:
np. $x = 3 \Rightarrow f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 > 0$
Funkcja rośnie na $(2, +\infty)$.

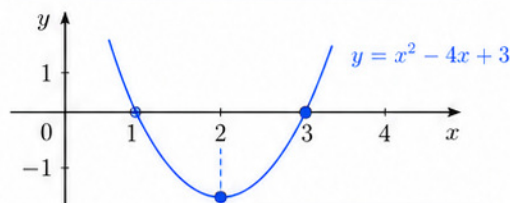
4. Ekstremum

Pochodna zmienia znak z $-$ na $+$ w punkcie $x = 2$, więc mamy minimum lokalne.

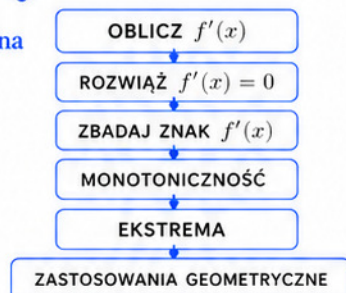
Obliczamy wartość funkcji w tym punkcie:

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

Minimum lokalne: $(2, -1)$



8. Mapa decyzyjna



5. Równanie stycznej w punkcie $x = 1$

- Wartość funkcji w $x = 1$: $f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$

Punkt: $P = (1, 0)$

- Nachylenie stycznej: $f'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$

- Równanie stycznej (postać punkt–nachylenie):

$$y - 0 = -2(x - 1)$$

Stąd:

$$y = -2x + 2$$

6. Odpowiedzi zbiorcze

Pochodna funkcji	$f'(x) = 2x - 4$
Monotoniczność	maleje na $(-\infty, 2)$ rośnie na $(2, +\infty)$
Ekstremum	minimum w punkcie $(2, -1)$
Styczna w $x = 1$	$y = -2x + 2$

7. Autokontrola modułu



- Co oznacza nierówność $f'(x) > 0$?
- Jak znaleźć punkt krytyczny funkcji?
- Kiedy punkt krytyczny jest minimum?
- Jak wyznaczyć nachylenie stycznej?

9. Zapamiętaj!



Pochodna
zamienia wzór funkcji
w informację
o jej zachowaniu.

Całki

Różniczkowanie pyta o zmianę.

Całkowanie pomaga tę zmianę odtworzyć i zsumować.



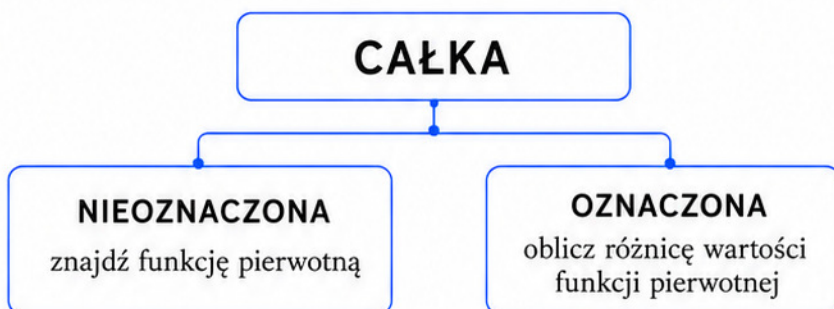
Cel modułu:

Nauczyć studenta rozpoznawać podstawowe rodzaje całek, dobierać właściwą metodę i rozumieć związek między całką a polem pod wykresem.

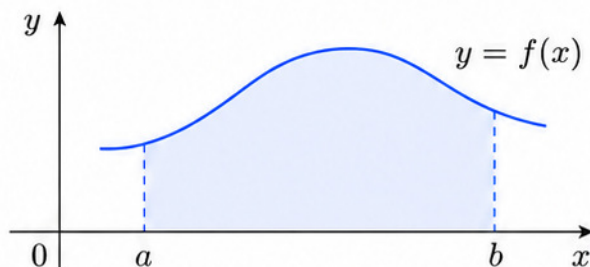


Czytelnik przećwicz:

- podstawowe całki nieoznaczone;
- całkowanie przez podstawienie;
- całkowanie przez części;
- podstawowe przypadki funkcji wymiernych;
- całki oznaczone;
- pola pod wykresem;
- pola między wykresami;
- wybór strategii całkowania.



Jeśli $F'(x) = f(x)$,
to $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.



$$\int_a^b f(x) dx$$

sumowanie bardzo małych
fragmentów pola

POCHODNA:

$$F(x) \rightarrow F'(x) = f(x)$$

CAŁKA:

$$f(x) \rightarrow F(x) + C$$

Zadanie 28 — Całkowanie jako odwracanie różniczkowania



Cel dydaktyczny: Nauczyć się całkować proste wielomiany, rozpoznawać i stosować regułę potęgową całkowania, rozumieć rolę stałej całkowania.

1. Reguła potęgowa całkowania

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{dla } n \neq -1$$

Zwiększ wykładnik o 1, potem podziel przez nowy wykładnik.

2. Całkujemy wyraz po wyrazie

- $\int 3x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} = x^3$
- $\int -4x dx = -4 \cdot \frac{x^2}{2} = -2x^2$
- $\int 2 dx = 2x$

3. Łączymy wynik

$$\int (3x^2 - 4x + 2) dx = x^3 - 2x^2 + 2x + C$$



ODPOWIEDŹ:

$$x^3 - 2x^2 + 2x + C$$

4. Dlaczego dodajemy +C?

Pochodna dowolnej stałej jest równa 0: $(k)' = 0$ dla każdej liczby k . Dlatego funkcje $F(x)$, $F(x) + 5$ oraz $F(x) - 100$ mają tę samą pochodną. Stąd całka nieoznaczona opisuje całą rodzinę funkcji: $F(x) + C$, gdzie C jest dowolną stałą.

5. Sprawdzenie przez różniczkowanie

$$\frac{d}{dx} [x^3 - 2x^2 + 2x + C]$$

$$= 3x^2 - 4x + 2$$

Zgadza się z funkcją podcałkową.

6. Karta wzorów całkowania

Całka	Wynik
$\int 1 dx$	$x + C$
$\int x dx$	$\frac{x^2}{2} + C$
$\int x^2 dx$	$\frac{x^3}{3} + C$
$\int e^x dx$	$e^x + C$
$\int \frac{1}{x} dx$	$\ln x + C$
$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$

7. Pułapka!



Reguła potęgowa $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ nie działa dla $n = -1$, ponieważ mianownik byłby równy zero. Dla $\frac{1}{x}$ korzystamy ze wzoru:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

8. Mini-zadanie

Policz całkę:

$$\int (4x^3 + 3) dx$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \int 4x^3 dx + \int 3 dx &= 4 \cdot \frac{x^4}{4} + 3x + C \\ &= x^4 + 3x + C \end{aligned}$$



ODPOWIEDŹ:

$$x^4 + 3x + C$$

Zadanie 29 – Gdy widzisz funkcję i jej pochodną, pomyśl o podstawieniu



Cel: Nauczyć się rozpoznawać „dobry” moment na podstawienie i sprawnie prowadzić całe rozwiązanie całki nieoznaczonej.

Zadanie główne: $\int 2x(x^2 + 1)^3 dx$

1. Rozpoznanie

Widzimy $(x^2 + 1)^3$ i obok $2x$.

A ponieważ $(x^2 + 1)' = 2x$, to bardzo mocna wskazówka, że powinniśmy wykonać podstawienie.

2. Wprowadzenie zmiennej

$$\begin{aligned}u &= x^2 + 1 \\du &= 2x dx\end{aligned}$$

3. Zmiana całki

Podstawiamy do całki:

$$\int 2x(x^2 + 1)^3 dx = \int u^3 du$$

4. Całkowanie

Całkujemy po u :

$$\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$$

5. Powrót do x

Ponieważ $u = x^2 + 1$, więc wynik to:

$$\frac{(x^2 + 1)^4}{4} + C$$

Odpowiedź: $\frac{1}{4}(x^2 + 1)^4 + C$

6. Sprawdzenie

Różniczkujemy wynik i sprawdzamy, czy otrzymamy całkę.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{4}(x^2 + 1)^4\right)' &= \frac{1}{4} \cdot 4(x^2 + 1)^3 \cdot (2x) \\&= 2x(x^2 + 1)^3\end{aligned}$$

Zgadza się z podcałkową.

7. Karta rozpoznawania – szukaj takich układów

Widzisz	To znak na podstawienie
$f'(x) \cdot [f(x)]^n$	$u = f(x), du = f'(x) dx$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$u = f(x), du = f'(x) dx$
$f'(x)e^{f(x)}$	$u = f(x), du = f'(x) dx$
$f'(x)\cos(f(x))$	$u = f(x), du = f'(x) dx$

8. Przykład drugi

Oblicz $\int 3x^2 e^{x^3} dx$.

Podstawiamy: $u = x^3, du = 3x^2 dx$.

Wówczas:

$$\int 3x^2 e^{x^3} dx = \int e^u du = e^u + C$$

Powrót do x : $e^{x^3} + C$.

9. Pułapka – czego unikać



Nie wybieraj u na chybił trafił.

Dobre podstawienie powinno upraszczać całkę i zwykle stoi obok swojej pochodnej. Jeśli po podstawieniu całka staje się bardziej skomplikowana – to zły wybór.

10. Mini-zadanie

Oblicz całkę: $\int 2x \cos(x^2) dx$.

Podstawiamy: $u = x^2, du = 2x dx$.

Wówczas:

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \int \cos u du = \sin u + C$$

Powrót do x : $\sin(x^2) + C$.

Odpowiedź: $\sin(x^2) + C$

Zadanie 30 — Gdy iloczyn nie pasuje do podstawienia



Cel: Nauczyć się stosować metodę całkowania przez części do całek postaci iloczynu funkcji, np. $x \cdot e^x$.

1. Wzór całkowania przez części

$$\int u dv = uv - \int v du$$

2. Wybór funkcji u i dv

Mamy iloczyn $x \cdot e^x$. Wybieramy funkcje tak, aby:

- u po zróżniczkowaniu stało się prostsze,
- dv łatwo się całkowało.

Wybieramy $u = x$ (bo pochodzi łatwo: 1),
oraz $dv = e^x dx$ (bo łatwo się całkuje).

3. Obliczamy du i v

$$u = x$$

$$dv = e^x dx$$

$$du = dx$$

$$v = e^x$$

4. Podstawiamy do wzoru

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

5. Kończymy obliczenia

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C \\ &= e^x(x - 1) + C \end{aligned}$$

Odpowiedź: $e^x(x - 1) + C$

6. Kontrola wyniku

Różniczkujemy $\frac{d}{dx} [e^x(x - 1)]$ (reguła iloczynu).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [e^x(x - 1)] &= e^x(x - 1) + e^x \cdot 1 = e^x(x - 1) + e^x \\ &= x e^x \end{aligned}$$

Zgadza się z podcałkową funkcją.

7. Kiedy stosować tę metodę?

- iloczyn wielomianu przez funkcję wykładniczą,
- iloczyn wielomianu przez funkcję trygonometryczną,
- iloczyn funkcji logarytmicznej przez inną funkcję,
- czasem iloczyn z funkcją trygonometryczną odwrotną.

8. Heurystyka LIATE

L	Logarithmic	funkcje logarytmiczne
I	Inverse trigonometric	funkcje trygonometryczne odwrotne
A	Algebraic	funkcje algebraiczne (np. wielomiany)
T	Trigonometric	funkcje trygonometryczne
E	Exponential	funkcje wykładnicze

Wybieraj u spośród funkcji znajdujących się **WYŻEJ** na liście (bardziej „na lewo”). To tylko heurystyka, a nie bezwzględna reguła!

9. Drugi przykład: $\int x \cos x dx$

Wybieramy: $u = x$, $dv = \cos x dx$.

$$du = dx$$

$$v = \sin x$$

Stosujemy wzór:

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

10. Pułapka



Nie zapomnij o **MINUSIE** w wzorze

$$\int u dv = uv - \int v du$$

To częsty błąd!

11. Mini-zadanie

Oblicz całkę: $\int x \sin x dx$

Wskazówka: wybierz $u = x$, $dv = \sin x dx$.

Odpowiedź:

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Zadanie 31 — Najpierw uprość funkcję wymierną

1. Rozbij ułamek na prostsze składniki

$$\frac{2x+3}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{3}{x} = 2 + \frac{3}{x}$$

Rozdzielamy licznik przez mianownik.

2. Zapisz całkę

$$\int \frac{2x+3}{x} dx = \int \left(2 + \frac{3}{x}\right) dx = \int 2 dx + 3 \int \frac{1}{x} dx$$

3. Oblicz całki składowe

$$\int 2 dx = 2x$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

Zatem:
$$\int \frac{2x+3}{x} dx = 2x + 3 \ln|x| + C$$

4. Dlaczego pojawia się wartość bezwzględna?

Pochodna $\ln|x|$ wynosi $\frac{1}{x}$ zarówno dla $x > 0$,
jak i dla $x < 0$ (w dziedzinie $x \neq 0$).

Sprawdzenie:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \text{ dla } x > 0 \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x} \text{ dla } x < 0$$

Dlatego używamy $\ln|x|$.

5. Strategia — zanim zaczniesz całkować

Zadaj sobie pytanie	Cel
Czy mogę uprościć, rozdzielić lub wykonać dzielenie?	Uproszczenie funkcji wymiernej znacznie ułatwia całkowanie.

6. Drugi przykład: $\int \frac{x^2+1}{x} dx$

$$\frac{x^2+1}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x} dx &= \int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \int x dx + \int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C \end{aligned}$$

10. Mini-zadanie

Oblicz całkę $\int \frac{3x^2+2}{x} dx$.

$$\frac{3x^2+2}{x} = \frac{3x^2}{x} + \frac{2}{x} = 3x + \frac{2}{x} \quad \int \frac{3x^2+2}{x} dx = \int \left(3x + \frac{2}{x}\right) dx = \int 3x dx + 2 \int \frac{1}{x} dx = \frac{3x^2}{2} + 2 \ln|x| + C$$

7. Mikroprzykład: gdy w liczniku jest pochodna mianownika

Oblicz $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$.

Nie rozdzielaj ułamka. Zauważ, że pochodna mianownika to $2x$ — dokładnie licznik.

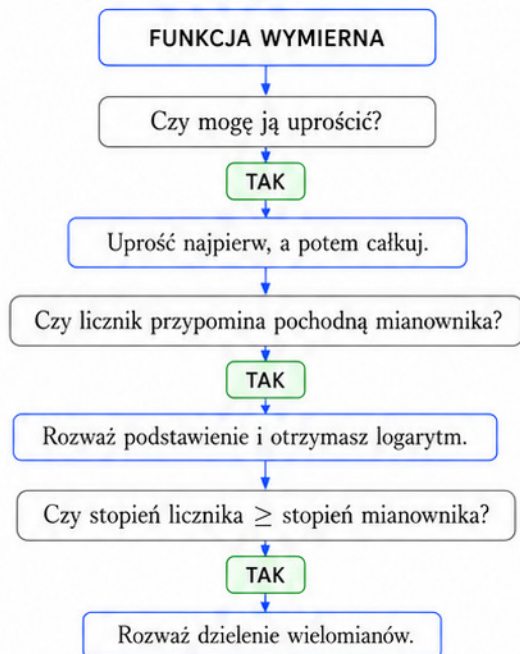
Podstawienie: $u = x^2 + 1$, $du = 2x dx$

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|x^2+1| + C$$

Ponieważ $x^2 + 1 > 0$ dla każdego x , mamy $|x^2 + 1| = x^2 + 1$.

Zatem:
$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + C$$

8. Twoja karta decyzyjna



9. Zakres tego działu



Nie rozwijamy jeszcze pełnego rozkładu na ułamki proste (rozkładu na sumę ułamków prostych).

Na tej stronie omawiamy tylko podstawowe przypadki.

Zadanie 32 – Od funkcji pierwotnej do konkretnej liczby



Cel dydaktyczny:

Nauczyć się obliczać całkę oznaczoną z wykorzystaniem funkcji pierwotnej oraz interpretować jej wynik.



Na dziś potrzebujesz:

- pochodną i funkcję pierwotną,
- twierdzenie o wartości średniej całki,
- uważnej kolejności działań.

1. Znajdź funkcję pierwotną

$$\int (3x^2 + 1) dx = \int 3x^2 dx + \int 1 dx \\ = x^3 + x + C$$

Do całki oznaczonej wybieramy wygodną funkcję pierwotną bez stałej: $F(x) = x^3 + x$.

Stała C nie jest potrzebna, ponieważ w różnicy $F(b) - F(a)$ i tak się skróci.

2. Zastosuj twierdzenie o wartości średniej całki

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Tutaj: $a = 0$, $b = 2$.

3. Oblicz $F(2)$

$$F(2) = 2^3 + 2 = 8 + 2 = 10$$

4. Oblicz $F(0)$

$$F(0) = 0^3 + 0 = 0$$

5. Odejmij

$$F(2) - F(0) = 10 - 0 = 10$$

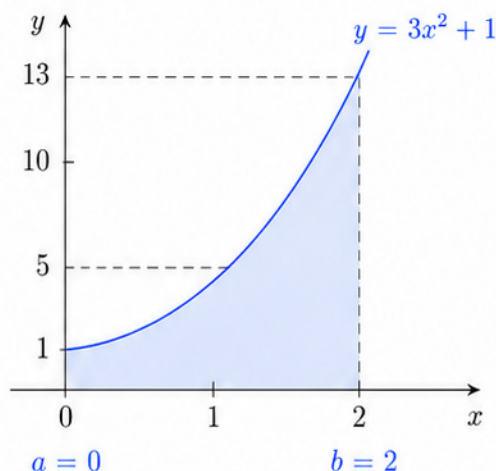
Odpowiedź:

$$\int_0^2 (3x^2 + 1) dx = 10$$

6. Najważniejsza różnica

Całka nieoznaczona	daje funkcję: $F(x) + C$
Całka oznaczona	daje liczbę: $F(b) - F(a)$

7. Wizualizacja



9. Pułapka (uwaga!)



Zawsze odejmujemy wartość w dolnej granicy od wartości w górnej granicy:

$$F(b) - F(a)$$

Nigdy odwrotnie: $F(a) - F(b)$.

10. Mini-zadanie kontrolne

Oblicz:

$$\int_1^3 2x dx.$$

Funkcja pierwotna:

$$F(x) = x^2$$

$$\int_1^3 2x dx = [x^2]_1^3 \\ = 3^2 - 1^2 \\ = 9 - 1 = 8$$

Odpowiedź kontrolna: 8

11. Zapamiętaj to!



Całka oznaczona daje liczbę, ale aby interpretować ją jako pole geometryczne, trzeba jeszcze zwrócić uwagę na znak funkcji.

Zadanie 33 — Kiedy całka oznaczona jest polem?



Cel dydaktyczny: Nauczyć studenta interpretować całkę oznaczoną jako pole wtedy, gdy funkcja znajduje się nad osią OX .

1. Sprawdź znak funkcji

Na przedziale $[0, 2]$ funkcja $f(x) = x + 1$ jest dodatnia.

$$f(0) = 0 + 1 = 1 \quad f(2) = 2 + 1 = 3$$

Ponieważ funkcja jest liniowa i rosnąca, wykres leży powyżej osi OX na całym przedziale $[0, 2]$.

2. Zapisz pole jako całkę

$$P = \int_0^2 (x + 1) dx$$

3. Znajdź funkcję pierwotną

$$\int (x + 1) dx = \frac{x^2}{2} + x$$

$$\text{Zatem } F(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$

4. Zastosuj granice

$$P = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^2$$

5. Oblicz górną granicę

$$F(2) = \frac{2^2}{2} + 2 = \frac{4}{2} + 2 = 4$$

6. Oblicz dolną granicę

$$F(0) = \frac{0^2}{2} + 0 = 0$$

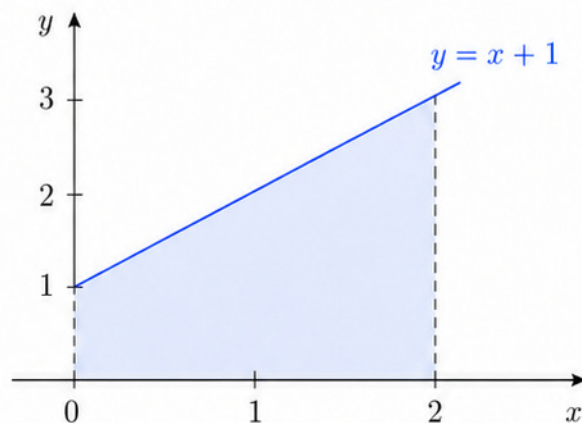
7. Wynik

$$P = 4 - 0 = 4$$

Odpowiedź:

Pole wynosi 4 jednostki kwadratowe.

8. Wizualizacja



9. Ważne rozróżnienie



Jeżeli $f(x) \geq 0$ na całym $[a, b]$, wtedy pole pod wykresem funkcji na tym przedziale wynosi:

$$\text{pole} = \int_a^b f(x) dx$$

10. Pułapka (uwaga!)



Jeżeli wykres funkcji leży poniżej osi OX , całka oznaczona może być ujemna, ale pole geometryczne musi być dodatnie.

Przykład: $\int_0^1 (-x) dx = -\frac{1}{2}$,
ale pole wynosi $\frac{1}{2}$.

11. Mini-zadanie

Oblicz pole pod wykresem $f(x) = 2x$ na $[0, 3]$.

$$\int_0^3 2x dx = \left[x^2 \right]_0^3 = 9$$

Odpowiedź kontrolna: 9

Zadanie 34 — Górna funkcja minus dolna funkcja



Cel dydaktyczny: Nauczyć studenta budować całkę pola jako różnicę dwóch funkcji.

1. Najpierw ustal, która funkcja jest wyżej

Porównaj funkcje $f(x) = x + 2$ oraz $g(x) = x^2$ na $[0, 2]$.

x	$f(x) = x + 2$	$g(x) = x^2$	Porównanie
0	$f(0) = 2$	$g(0) = 0$	$f(0) > g(0)$
1	$f(1) = 3$	$g(1) = 1$	$f(1) > g(1)$
2	$f(2) = 4$	$g(2) = 4$	$f(2) = g(2)$

Na $[0, 2]$ mamy $f(x) \geq g(x)$.

Funkcja $f(x) = x + 2$ jest wyżej lub równa.

2. Reguła pola

$$P = \int_a^b [\text{funkcja g\kern-0.08em\scriptsize g\kern-0.08em\scriptsize o\kern-0.08em\scriptsize r\kern-0.08em\scriptsize n\kern-0.08em\scriptsize a} - \text{funkcja d\kern-0.08em\scriptsize o\kern-0.08em\scriptsize l\kern-0.08em\scriptsize n\kern-0.08em\scriptsize a}] dx$$

$$P = \int_0^2 [(x + 2) - x^2] dx$$

3. Uporządkuj

$$P = \int_0^2 (-x^2 + x + 2) dx$$

4. Znajdź funkcję pierwotną

$$\int (-x^2 + x + 2) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x$$

5. Zastosuj granice

$$P = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2$$

$$\begin{aligned} \text{Dla } x = 2: \quad -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 &= -\frac{8}{3} + 2 + 4 \\ &= -\frac{8}{3} + 6 = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Dla } x = 0: \quad 0$$

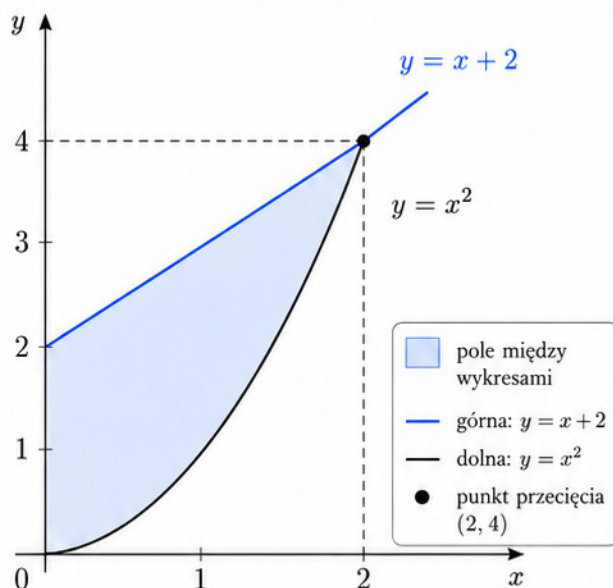
$$P = \frac{10}{3} - 0 = \frac{10}{3}$$



6. Odpowiedź

$$P = \frac{10}{3} \text{ jednostki kwadratowe.}$$

7. Wizualizacja



8. POLE MIĘDZY WYKRESAMI

- 1 Znajdź punkty przecięcia lub granice przedziału.
- 2 Ustal funkcję g\kern-0.08em\scriptsize o\kern-0.08em\scriptsize r\kern-0.08em\scriptsize n\kern-0.08em\scriptsize a (wyżej położoną).
- 3 Ustal funkcję d\kern-0.08em\scriptsize o\kern-0.08em\scriptsize l\kern-0.08em\scriptsize n\kern-0.08em\scriptsize a (niżej położoną).
- 4 Zapisz: g\kern-0.08em\scriptsize o\kern-0.08em\scriptsize r\kern-0.08em\scriptsize n\kern-0.08em\scriptsize a - d\kern-0.08em\scriptsize o\kern-0.08em\scriptsize l\kern-0.08em\scriptsize n\kern-0.08em\scriptsize a.
- 5 Całkuj na danym przedziale.
- 6 Wynik pola powinien być dodatni.

9. Pułapka (uwaga!)



Nie zakładaj kolejności funkcji po ich zapisie!
Zawsze sprawdź, która funkcja jest wyżej na danym przedziale.
Błędna kolejność da ujemne pole.

10. Mini-zadanie

Znajdź pole między prostymi $y = 2$ i $y = x$ na $[0, 2]$.

Funkcja g\kern-0.08em\scriptsize o\kern-0.08em\scriptsize r\kern-0.08em\scriptsize n\kern-0.08em\scriptsize a: $y = 2$, funkcja d\kern-0.08em\scriptsize o\kern-0.08em\scriptsize l\kern-0.08em\scriptsize n\kern-0.08em\scriptsize a: $y = x$.

$$P = \int_0^2 (2 - x) dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = (4 - 2) - 0 = 2$$

Odpowiedź: $P = 2$ jednostki kwadratowe.

Zadanie 35 — Nie licz od razu. Najpierw rozpoznaj strukturę



Cel dydaktyczny:

Nauczyć studenta dobierać metodę całkowania na podstawie budowy wyrażenia.



Co widzisz w całce?

2. Przypadek A — podstawowy wzór

Jeśli całka ma postać $\int x^n dx$ lub prostą sumę znanych funkcji, używamy wzorów podstawowych.

Przykład:

$$\int (x^2 + e^x) dx$$

3. Przypadek B — funkcja złożona + pochodna środka

Jeśli widzisz jeden z wzorców:

- $f'(x) [f(x)]^n$
- $f'(x) e^{f(x)}$
- $\frac{f'(x)}{f(x)}$

rozważ podstawienie.

Przykład:

$$\int 2x(x^2 + 1)^5 dx$$

4. Przypadek C — iloczyn dwóch różnych typów funkcji

Jeśli całka zawiera iloczyn funkcji różnych typów, np.

- $x \cdot e^x$
- $x \cdot \sin x$
- $x \cdot \ln x$

rozważ całkowanie przez części.

Przykład:

$$\int x e^x dx$$

5. Przypadek D — funkcja wymierna

Jeśli całka ma postać

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ sprawdź:}$$

- czy można uprościć?
- czy licznik jest pochodną mianownika?
- czy trzeba wykonać dzielenie?

Przykład:

$$\int \frac{x^2 + 1}{x} dx$$

6. A

$$\int 5x^4 dx$$



Metoda:

wzór podstawowy

7. B

$$\int 2x \cos(x^2) dx$$



Metoda:
podstawienie

Ponieważ
 $d(x^2) = 2x dx$.

8. C

$$\int x e^x dx$$



Metoda:

przez części

9. D

$$\int \frac{x^2 + 1}{x} dx$$



Metoda:

najpierw
uproszczenie

10. E

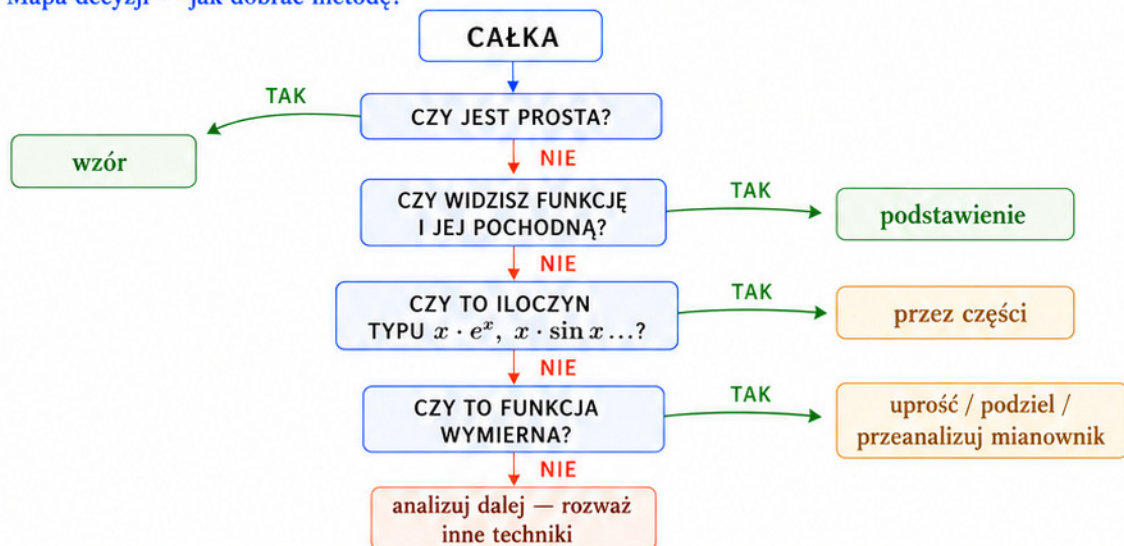
$$\int \frac{3x^2}{x^3 + 4} dx$$



Metoda:
podstawienie

Ponieważ licznik jest
pochodną części
mianownika.

11. Mapa decyzji — jak dobrać metodę?



12. Najwięcej czasu oszczędzasz nie dzięki szybszym obliczeniom, lecz dzięki szybszemu rozpoznaniu właściwej metody.

Zadanie 36 — Rozpoznaj metodę, policz i sprawdź wynik



Cel dydaktyczny: Połączyć wybór metody, podstawienie oraz całkę oznaczoną w jednym zadaniu.

$$\int_0^1 2x(x^2 + 1) dx$$

1. Rozpoznanie

W całce widzimy $x^2 + 1$ oraz $2x$.
Pochodna funkcji $x^2 + 1$ to $2x$.
Wybieramy metodę podstawienia.

2. Podstawienie

$$u = x^2 + 1 \quad du = 2x dx$$

3. Zmień granice

Jeśli $x = 0$, to $u = 0^2 + 1 = 1$.
Jeśli $x = 1$, to $u = 1^2 + 1 = 2$.
To bardzo ważny krok dydaktyczny!

4. Nowa całka

$$\int_1^2 u du$$

5. Całkuj

$$\int u du = \frac{u^2}{2} \Rightarrow \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^2$$

6. Podstaw granice

$$\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



Odpowiedź: $\frac{3}{2}$

10. Odpowiedzi do autokontroli

1. W całce nieoznaczonej.
2. Liczbą.
3. Gdy widzimy funkcję oraz jej pochodną.
4. $\int$ (górną – dolną) dx .

7. Alternatywna ścieżka

Można wrócić do zmiennej x .

$$\text{Mamy } \int 2x(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} (x^2 + 1)^2.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} (x^2 + 1)^2 \right]_0^1 &= \\ &= \frac{1}{2} (1^2 + 1)^2 - \frac{1}{2} (0^2 + 1)^2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

8. Która metoda jest lepsza?



W całce oznaczonej, gdy zmieniamy zmienną z x na u , wygodnie jest jednocześnie zmienić granice całki. Dzięki temu nie trzeba wracać do zmiennej x .

9. Autokontrola modułu



1. Kiedy potrzebne jest $+C$?
2. Czy w całce oznaczonej wynik jest funkcją czy liczbą?
3. Kiedy warto użyć podstawienia?
4. Jak zapisać pole między dwoma wykresami?

11. Zapamiętaj!



Najpierw rozpoznaj strukturę całki. Dopiero potem wybierz technikę.

Strategia egzaminacyjna i zadania mieszane

Na egzaminie nie dostajesz nazwy metody.
Musisz ją rozpoznać samodzielnie.



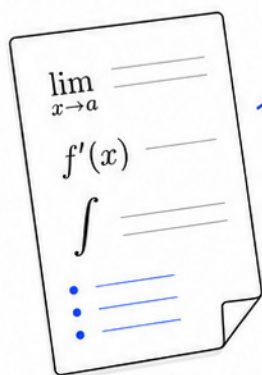
Cel modułu:

Połączyć wiedzę z granic, pochodnych i całek oraz nauczyć studenta podejmowania szybkich decyzji strategicznych.



Czytelnik przećwicz:

- rozpoznawanie typu zadania,
- wybór metody bez podpowiedzi,
- łączenie kilku działów w jednym problemie,
- kontrolę wyniku,
- unikanie najczęstszych błędów,
- samodzielny schemat działania pod presją czasu.



GRANICE

POCHODNE

CAŁKI

1 PRZECZYTAJ

2 ROZPOZNAJ

3 ZAPLANUJ

4 POLICZ

5 SPRAWDŹ



Trzy pytania startowe

- 1 Czego zadanie ode mnie chce?
- 2 Jakie narzędzie pasuje do tej struktury?
- 3 Po czym poznam, że wynik ma sens?



Dobra strategia zaczyna się
przed pierwszym obliczeniem.

Zadanie 37 — Najpierw przetłumacz polecenie na działanie



Cel dydaktyczny: Nauczyć studenta rozpoznawać słowa-klucze i struktury matematyczne, które wskazują potrzebną metodę.

1. Jeśli widzisz „oblicz granicę”

Pierwszy ruch:

PODSTAW

- zwykła liczba $\rightarrow$ koniec
- $0/0 \rightarrow$ upraszczaj
- pierwiastki $\rightarrow$ sprawdź sprzężenie
- $\infty/\infty \rightarrow$ porównaj dominujące potęgi
- jednostronna $\rightarrow$ zbadaj znaki

2. Jeśli widzisz „zbadaj monotoniczność”

Pierwszy ruch:

POLICZ $f'(x)$

$f'(x) = 0$
 $\downarrow$
punkty krytyczne
 $\downarrow$
tabela znaków
 $\downarrow$
rośnie/maleje

3. Jeśli widzisz „znajdź ekstremum”



Samo rozwiązanie
 $f'(x) = 0$
to za mało.

Musisz jeszcze zbadać
zmianę znaku
pochodnej.

4. Jeśli widzisz „wyznacz styczną”

Potrzebujesz $f(x_0)$
i $f'(x_0)$,
następnie:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

gdzie $m = f'(x_0)$

5. Jeśli widzisz „oblicz całkę”

Najpierw sklasyfikuj strukturę:

- prosta potęga
- funkcja złożona
- iloczyn
- funkcja wymierna

6. Jeśli widzisz „oblicz pole”

Dodatkowy krok:



- sprawdź, co jest nad osią
- sprawdź, co jest pod osią
- ustal wykres górny
- ustal wykres dolny

7. Tabela szybkich decyzji

Polecenie	Pierwszy krok
$\rightarrow$ granica	podstaw
∞ ciągłość	$f(a) +$ granica
f' pochodna	rozpoznaj regułę
$\nearrow$ monotoniczność	$f'(x)$
☆ ekstremum	$f'(x) = 0 +$ znak
✂ styczna	$f(x_0), f'(x_0)$
$\int$ całka	rozpoznaj strukturę
$\int$ pole	ustal granice i znak

8. Mini-test — co zrobisz najpierw?

A

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$\downarrow$
granica $0/0 \rightarrow$
rozkład na czynniki

B

Znajdź minimum
funkcji

$\downarrow$
pochodna +
analiza znaku

C

$$\int 2xe^{x^2} dx$$

$\downarrow$
podstawienie

D

Pole między f i g

$\downarrow$
górna minus dolna

9. Zapamiętaj!



Nie zaczynaj od liczenia. Zacznij od nazwania problemu.

Zadanie 38 — Najpierw usun problem z granicą, potem przejdź do pochodnej



Dana jest funkcja: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ dla $x \neq 1$ oraz $f(1) = 2$. Wykonaj:

1. Sprawdź ciągłość w $x = 1$.
2. Uprość wzór funkcji dla $x \neq 1$.
3. Oblicz pochodną w otoczeniu punktu 1.
4. Podaj nachylenie stycznej w punkcie $(1, 2)$.

1. Uprość funkcję

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Dla $x \neq 1$ mamy:

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

2. Granica

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

3. Wartość funkcji

Z definicji: $f(1) = 2$.

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2$,
funkcja jest ciągła w $x = 1$.

4. Pochodna

Dla $x \neq 1$ mamy $f(x) = x + 1$,
więc $f'(x) = 1$.

Pochodna istnieje w każdym punkcie otoczenia 1.

5. Nachylenie stycznej

$$f'(1) = 1.$$

Nachylenie stycznej w punkcie $(1, 2)$ wynosi $m = 1$.

6. (Opcjonalnie) Równanie stycznej

Prosta styczna w punkcie $(1, 2)$ ma równanie:

$$y - 2 = 1(x - 1)$$

$$y = x + 1.$$

7. Dlaczego zadanie jest mieszane?

NIECIĄGŁY ZAPIS ALGEBRAICZNY

GRANICA

CIĄGŁOŚĆ

POCHODNA

GEOMETRIA

8. Pułapka



Nie próbuj różniczkować pierwotnego ułamka w punkcie $x = 1$, nie analizując najpierw definicji funkcji.

Najpierw zrozum jej zachowanie i sposób, w jaki została określona.

9. Autokontrola



Pytanie: Co sprawiło, że funkcja jest ciągła w $x = 1$?

Odpowiedź: Przypisano jej dokładnie tę wartość, do której dążyła funkcja w otoczeniu punktu: 2.

Zadanie 39 – Z pochodnej odczytaj historię całej funkcji



Dana jest funkcja $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Wykonaj polecenia:

- oblicz pochodną funkcji f ,
- znajdź punkty krytyczne,
- wyznaczyć przedziały monotoniczności,
- znaleźć ekstrema lokalne,
- obliczyć miejsca zerowe funkcji.

1. Pochodna

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$$

3. Tabela znaków

Dla $x < 1$ pochodna dodatnia, dla $1 < x < 3$ ujemna, dla $x > 3$ dodatnia.

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+



Wniosek: funkcja f rośnie na $(-\infty, 1)$, maleje na $(1, 3)$, rośnie na $(3, +\infty)$.

5. Ekstremum dla $x = 3$

Zmiana znaku: $- \rightarrow +$, więc mamy minimum lokalne.

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 27 - 54 + 27 = 0$$

Minimum lokalne: $(3, 0)$

7. Kluczowa obserwacja



W punkcie $x = 3$ czynnik $(x-3)^2$ oznacza, że mamy pierwiastek podwójny.

Wykres styka się z osią OX i zawraca, zamiast przez nią przechodzić.

9. Strategia



Pochodna $f'(x)$ odpowiada na pytanie:

„Jak funkcja się porusza?”

Równanie $f(x) = 0$ odpowiada na pytanie:

„Gdzie wykres spotyka oś OX ?”

To nie są te same równania — nie myl ich!

10. Pułapka!



$f'(x) = 0$ to NIE znaczy, że funkcja ma miejsce zerowe.

To znaczy, że w tym punkcie styczna do wykresu ma nachylenie 0 (punkt stacjonarny — ekstremum lub inny punkt krytyczny).

Miejsca zerowe znajdujemy z równania $f(x) = 0$.

2. Punkty krytyczne

Punkty krytyczne (miejsca zerowe pochodnej):

$$x = 1 \quad \text{i} \quad x = 3$$

4. Ekstremum dla $x = 1$

Zmiana znaku: $+ \rightarrow -$, więc mamy maksimum lokalne.

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 1 - 6 + 9 = 4$$

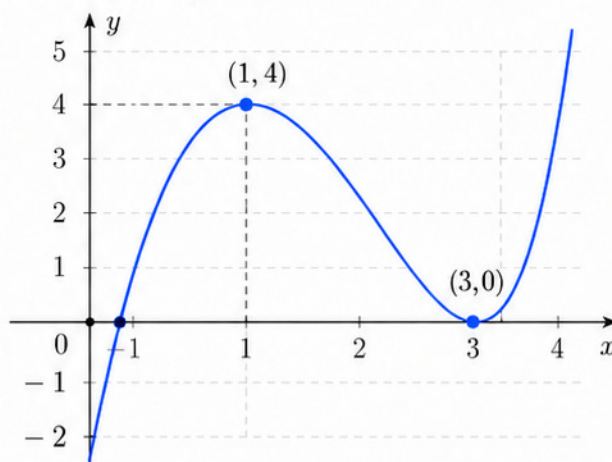
Maksimum lokalne: $(1, 4)$

6. Miejsca zerowe

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x-3)^2$$

Miejsca zerowe: $x = 0$ i $x = 3$

8. Wizualizacja



Zadanie 40 — Dwie operacje przeciwne w jednym zadaniu



Cel dydaktyczny:

Zobaczyć różnicę między całką oznaczoną a polem geometrycznym oraz zrozumieć, jak znak funkcji wpływa na wartość całki.

Dane: $f(x) = x^2 - 2x$.

Wykonaj:

1. Oblicz $f'(x)$.
2. Znajdź minimum funkcji.
3. Oblicz $\int_0^3 f(x) dx$.
4. Wyjaśnij, dlaczego otrzymana całka nie musi być równa całkowitemu polu geometrycznemu.

1. Pochodna

$$f'(x) = 2x - 2$$

2. Punkt krytyczny

$$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

3. Zbadaj znak

Dla $x < 1$ mamy $f'(x) < 0$

Dla $x > 1$ mamy $f'(x) > 0$

Wniosek: w punkcie $x = 1$ funkcja ma minimum.

4. Wartość minimum

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$$

Minimum w punkcie $(1, -1)$.

5. Oblicz całkę

$$\int_0^3 (x^2 - 2x) dx$$

Funkcja pierwotna: $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$

$$\text{Zatem } \int_0^3 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^3$$

6. Podstaw

Dla $x = 3$:

$$\frac{3^3}{3} - 3^2 = \frac{27}{3} - 9 = 9 - 9 = 0$$

Dla $x = 0$:

$$\frac{0^3}{3} - 0^2 = 0$$

Zatem

$$\int_0^3 f(x) dx = 0$$

7. Czy pole naprawdę wynosi zero?

! Nie. Funkcja $f(x) = x(x - 2)$ ma miejsca zerowe w $x = 0$ i $x = 2$.

- Na przedziale $(0, 2)$ funkcja jest ujemna (leży poniżej osi OX).
- Na przedziale $(2, 3)$ funkcja jest dodatnia (leży powyżej osi OX).

Ujemna część pola (na $(0, 2)$) i dodatnia część pola (na $(2, 3)$) znoszą się nawzajem w całce oznaczonej.

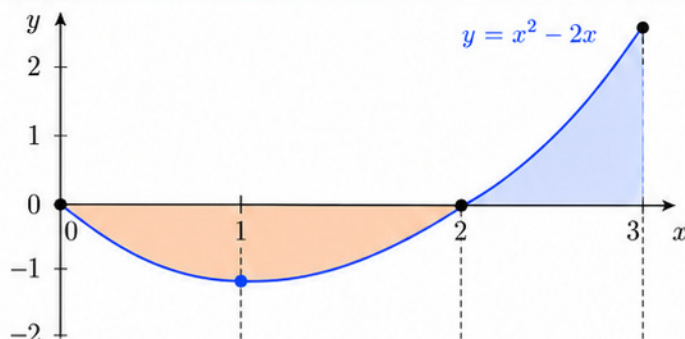
8. Kluczowa różnica

CAŁKA OZNACZONA	uwzględnia znak.
POLE GEOMETRYCZNE	sumuje dodatnie pola.

Aby obliczyć całkowite pole geometryczne, należy podzielić całkę w punkcie $x = 2$ i zmienić znak części ujemnej:

$$P = \int_0^2 -(x^2 - 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx.$$

9. Element wizualny



Na przedziale $(0, 2)$ funkcja jest ujemna. Obszar (pomarańczowy) liczy się z minusem w całce.

Na przedziale $(2, 3)$ funkcja jest dodatnia. Obszar (niebieski) liczy się z plusem.

Ujemne pole i dodatnie pole znoszą się: stąd $\int_0^3 f(x) dx = 0$, mimo że wykres „otacza” widoczne obszary.

10. Lekcja strategiczna



$f'(x) \rightarrow$ zachowanie funkcji (kierunek zmian, ekstrema).

$\int f(x) dx \rightarrow$ akumulacja wartości funkcji (suma z uwzględnieniem znaku).

11. Autokontrola



Pytanie: Dlaczego całka może być równa zero, choć wykres obejmuje widoczne obszary?

Odpowiedź: Bo obszary położone poniżej osi OX liczone są ze znakiem ujemnym i mogą zrównoważyć obszary dodatnie.

Zanim oddasz zadanie — przejdź tę mapę



Cel dydaktyczny:

Zamknąć zeszyt narzędziem, które student może stosować przy każdym nowym zadaniu bez pomocy materiału.

1. ETAP 1 — ROZPOZNAJ

Czego dokładnie szukam?

- ☐ granicy
- ☐ ciągłości
- ☐ pochodnej
- ☐ monotoniczności
- ☐ ekstremum
- ☐ stycznej
- ☐ całki
- ☐ pola
- ☐ dziedziny
- ☐ innej informacji o funkcji

2. ETAP 2 — SPRAWDŹ STRUKTURĘ

Granica

- ☐ Czy próbowałem bezpośredniego podstawienia?
- ☐ Czy otrzymałem $0/0$?
- ☐ Czy mogę rozłożyć na czynniki?
- ☐ Czy są pierwiastki i potrzebne jest sprzężenie?
- ☐ Czy badam nieskończoność?
- ☐ Czy potrzebuję granic jednostronnych?

Pochodna

- ☐ Czy to suma? Iloczyn? Iloraz? Funkcja złożona?
- ☐ Czy potrzebuję reguły łańcuchowej?

Całka

- ☐ Czy wystarczy wzór podstawowy?
- ☐ Czy widzę funkcję i jej pochodną?
- ☐ Czy potrzebne jest podstawienie?
- ☐ Czy to iloczyn pasujący do całkowania przez części?
- ☐ Czy funkcję wymierną można najpierw uprościć?

3. ETAP 3 — ZAPLANUJ

Użyję metody _____,
ponieważ _____.

Przykład:

Użyję rozkładu na czynniki,
ponieważ po podstawieniu
otrzymuję $0/0$.

4. ETAP 4 — POLICZ

Jeden krok = jedna jasna zmiana.



5. ETAP 5 — SPRAWDŹ

- ☐ Czy wynik należy do właściwej dziedziny?
- ☐ Czy nie podzieliłem przez zero?
- ☐ Czy nie zgubiłem znaku?
- ☐ Czy w całce nieoznaczonej dodałem $+C$?
- ☐ Czy pole geometryczne jest dodatnie?
- ☐ Czy w stycznej użyłem $f'(x_0)$?
- ☐ Czy $f'(x) = 0$ rzeczywiście daje ekstremum?
- ☐ Czy wynik jest logiczny na podstawie wykresu lub zachowania funkcji?

6. NAJCZĘSTSZE PUŁAPKI

1. Traktowanie $0/0$ jako odpowiedzi.
2. Skracanie składników zamiast czynników.
3. Zapominanie o dziedzinie.
4. Pomijanie pochodnej funkcji wewnętrznej.
5. Pisanie $(uv)' = u'v'$.
6. Zapominanie $+C$.
7. Mylenie całki oznaczonej z polem geometrycznym.
8. Uznawanie każdego $f'(x) = 0$ za ekstremum.



Nie musisz rozpoznawać
całego rozwiązania od razu.

Wystarczy, że potrafisz odpowiedzieć:

**Jaki jest mój następny
poprawny krok?**

Tak właśnie buduje się
samodzielność w Analizie Matematycznej.



ROZPOZNAJ



WYBIERZ



POLICZ



SPRAWDŹ

