



Analizy Matematycznej 1



Wizualny system kluczowych pojęć, wzorów, własności, wykresów, przykładów rozwiązyanych krok po kroku oraz skrótów powtórkowych — od podstaw, przez **granice**, **ciągłość** i **pochodne**, aż po **całki**.

**GRANICE**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

**CIĄGŁOŚĆ**

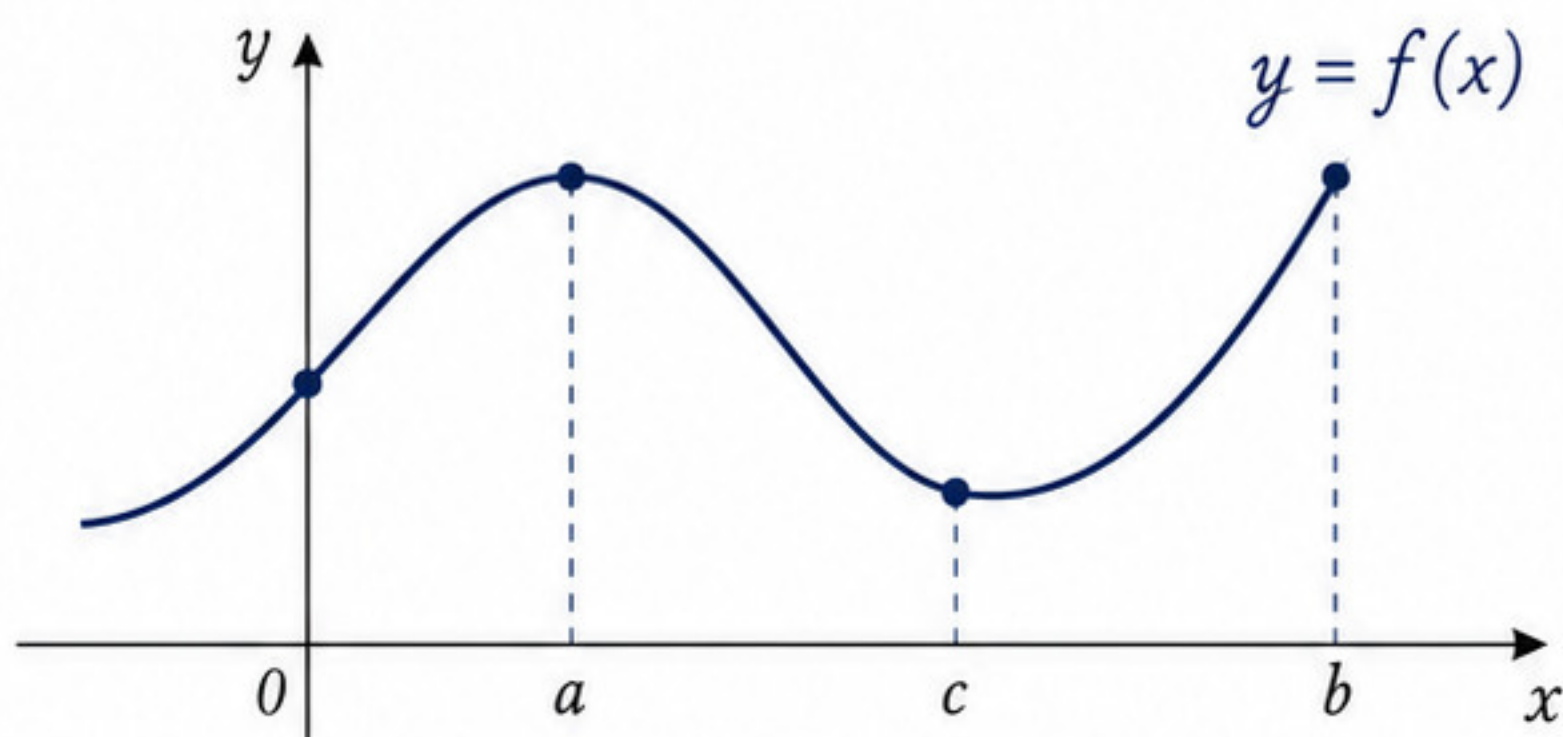
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

**POCHODNE**

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

**CAŁKI**

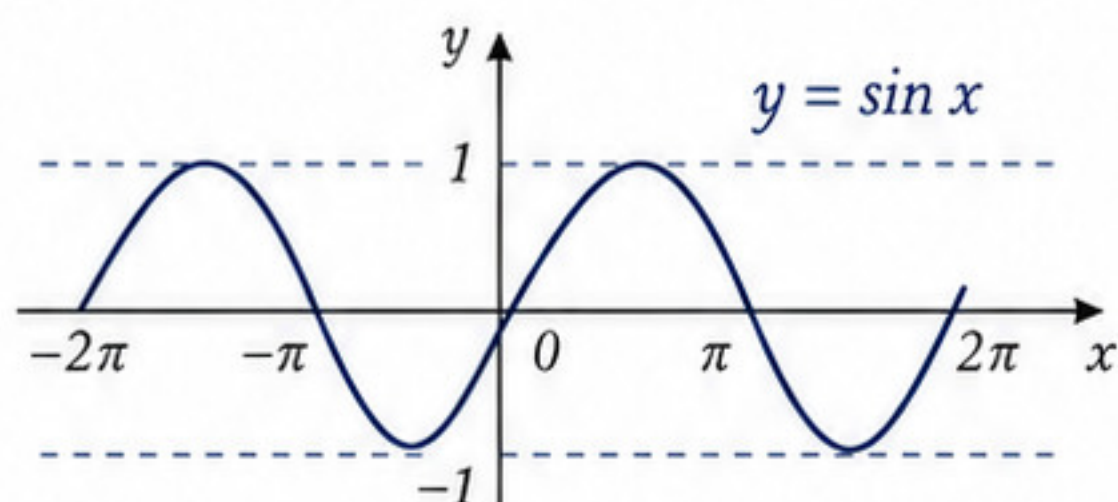
$$\int_a^b f(x) dx$$



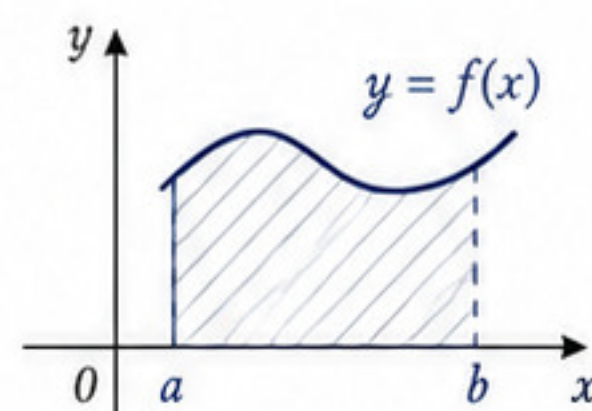
Reguła pochodnej

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$



$$\int_a^b f(x) dx =$$



Informacje o materiale Analizy Matematycznej 1

© 2026. Wszelkie prawa zastrzeżone.

Materiał przeznaczony jest do celów edukacyjnych i wspomagania nauki Analizy Matematycznej 1.

Definicje, wzory, przykłady i schematy zostały uporządkowane w formie materiału powtórkowego.

Materiał nie zastępuje zajęć akademickich, zaleceń prowadzącego ani oficjalnego programu danego przedmiotu.

Zabrania się kopiowania, odsprzedaży, publicznego udostępniania oraz rozpowszechniania całości lub części materiału bez odpowiedniej zgody właściciela praw.



Cel materiału

Szybko
powtarzać
pojęcia,
wzory i
schematy z
Analizy

Matematycznej
1.



Sposób korz

Czytaj
aktywnie,
porównuj
przykłady i
wracaj do
map w razie
potrzeby.



Prawa autorsk

Materiał
chroniony
prawem
autorskim.
Szanujmy
pracę
twórczą.

SPIIS TREŚCI

01 · FUNDAMENTY I PODSTAWY

- 04 Start modułu
- 05 Zbiory, przedziały
- 06 Potęgi i pierwiastki
- 07 Dziedzina i obraz
- 08 Wykres funkcji
- 09 Funkcja odwrotna
- 10 Funkcje elementarne
- 11 Wykładnicze i log
- 12 Trygonometria

02 · GRANICE I CIĄGŁOŚĆ

- 13 Start modułu
- 14 Pojęcie granicy
- 15 Granice jednostronne
- 16 Działania na granicach
- 17 Granice oznaczone
- 18 Nieoznaczoność 0/0
- 19 Niewymierności
- 20 Formy nieoznaczone
- 21 Asymptoty
- 22 Ciągłość
- 23 Nieciągłości

03 · POCHODNE

- 24 Start modułu
- 25 Definicja
- 26 Interpretacja
- 27 Tablica pochodnych
- 28 Reguły różniczkowania
- 29 Reguła łańcuchowa
- 30 Exp, log, tryg
- 31 Styczna i normalna
- 32 Monotoniczność
- 33 Druga pochodna

04 · CAŁKI

- 34 Start modułu
- 35 Całka nieoznaczona
- 36 Tablica całek
- 37 Podstawienie
- 38 Przez części
- 39 Ułamki proste
- 40 Całka oznaczona
- 41 Własności całki
- 42 Zastosowania

Wskazówka: Nie musisz czytać wszystkiego po kolei. Wróć bezpośrednio do mapy, której potrzebujesz podczas nauki lub rozwiązywania zadania.

Jak korzystać z tych notatek?

Nie musisz pamiętać wszystkiego od razu. Musisz wiedzieć, co oznacza dane pojęcie, jaki schemat zastosować i gdzie szybko sprawdzić szczegóły.

1. ZROZUM

Najpierw przeczytaj definicję i zobacz jej interpretację na prostym przykładzie.

2. ROZPOZNAJ SCHEMAT

Zwróć uwagę na charakterystyczne typy zadań, warunki oraz najczęstsze pułapki.

3. PRZEŚLEDŹ PRZYKŁAD

Przy każdym kroku odpowiedz sobie: dlaczego właśnie to robimy?

4. POWTÓRZ Z PAMIĘCI

Zasłoń część mapy i spróbuj samodzielnie odtworzyć definicję, wzór albo kroki rozwiązania.

PRZED KOŁOKWIUM:

zaczynij od czerwonych ramek, wskazówek i przykład

Pojęcie



Wzór



Przykład



Zastosowanie



Powtórka

01

Fundamenty i podstawy

Cel modułu: uporządkować najważniejsze narzędzia algebraiczne i pojęcia związane z funkcjami, aby kolejne działy Analizy Matematycznej były łatwiejsze do zrozumienia.

$|x|$

$x^2 - y^2$

$D(f)$

$f^{-1}(x)$

$\log_a x$

$\sin x$

Zbiory liczbowe, przedziały i wartość bezwzględna

Zbiory liczbowe

$\mathbb{N}$ — liczby naturalne: 0, 1, 2, ...
 $\mathbb{Z}$ — liczby całkowite: ..., -2, -1, 0, 1
 $\mathbb{Q}$ — liczby wymierne: p/q
 $\mathbb{R}$ — liczby rzeczywiste

Przedziały

(a,b) — otwarty: $a < x < b$
 $[a,b]$ — domknięty: $a \leq x \leq b$
 $[a,b), (a,b]$ — półotwarte
 ∞ nigdy nie jest końcem należącym do przedziału.

Wartość bezwzględna

$|x| = x$ dla $x \geq 0$
 $|x| = -x$ dla $x < 0$
 $|x|$ to odległość liczby x od zera.

Nierówności z wartością bezw

$$|x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r$$



$$|x - a| > r \Leftrightarrow x < a - r \text{ lub } x > a + r$$

Przykład

Rozwiąż nierówność: $|x - 2| \leq 3$
 $-3 \leq x - 2 \leq 3$
 $-1 \leq x \leq 5$
 Zatem: $x \in [-1, 5]$

Szybkie przypomnienie

$A \cup B$ — elementy z A lub B
 $A \cap B$ — elementy wspólne
 $A \setminus B$ — elementy A , które nie należą do B

Potęgi, pierwiastki i wzory skróconego mnożenia

POTĘGI

$$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$$

$$a^m / a^n = a^{(m-n)}$$

$$(a^m)^n = a^{(mn)}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{(-n)} = 1/a^n$$

PIERWIASTKI

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{(m/n)}$$

Pamiętaj o dziedzinie: pod pierwiastkiem parzystym musi być ≥ 0 .

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$



UWAGA

Najczęstsze błędy: znaki przy wzorach skróconego mnożenia, skracanie przed rozkładem na czynniki, pomijanie dziedziny.

PRZYKŁAD

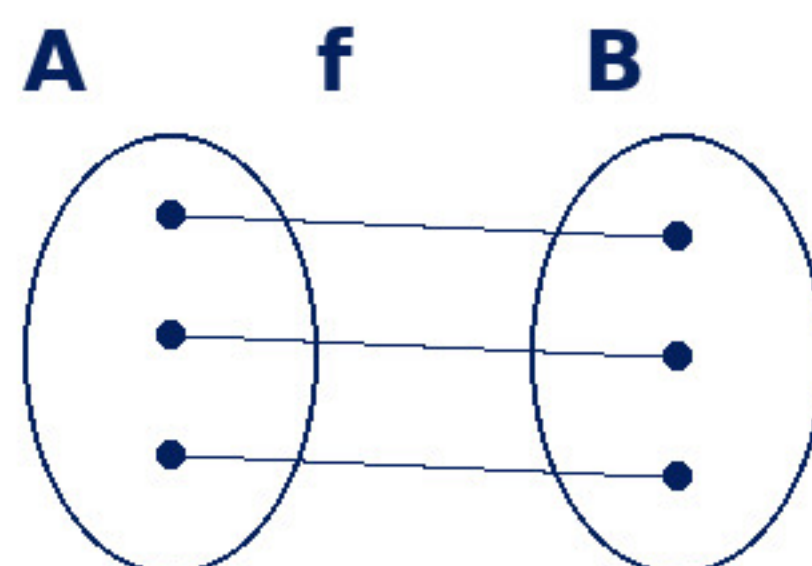
$$(x^2-9)/(x-3) = (x-3)(x+3)/(x-3) = x+3$$

Warunek: $x \neq 3$

Dziedzina, przeciwdziedzina i obraz funkcji

Definicje

Niech $f: A \rightarrow B$ będzie funkcją.
 Dziedzina A — zbiór argumentów, dla których funkcja jest określona.
 Przeciwdziedzina B — zbiór wartości, do których funkcja może trafić.
 Obraz $f(A)$ — wartości rzeczywiście przyjmowane przez funkcję.



! Jak wyznaczać dziedzinę

Mianownik nie może być równy 0.
 Pod pierwiastkiem parzystym: wyrażenie ≥ 0 .
 W logarytmie: argument > 0 .
 Uwzględniaj ograniczenia z kontekstu.

Przykłady

$f(x) = 1/(x-2) \rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
 $f(x) = \sqrt{3-x} \rightarrow D = (-\infty, 3]$
 $f(x) = \ln(x+1) \rightarrow D = (-1, \infty)$

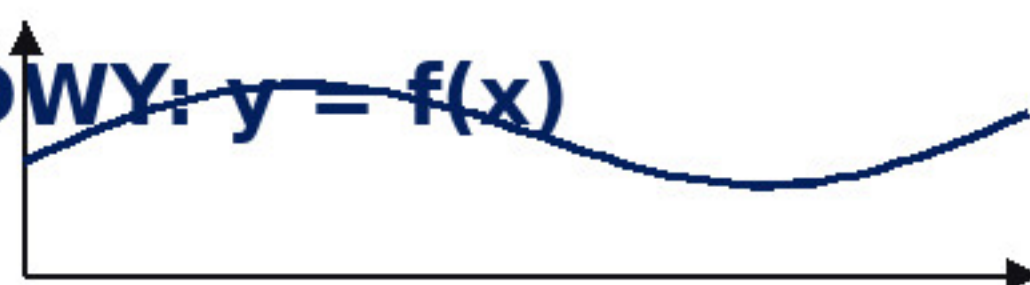
Przeciwdziedzina a obraz

Przeciwdziedzina B to zbiór wszystkich potencjalnych wartości funkcji, natomiast obraz $f(A)$ to tylko te wartości, które funkcja rzeczywiście przyjmuje.

Przykład: $f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$. Wtedy $f(A) = [0, \infty) \subset B$.

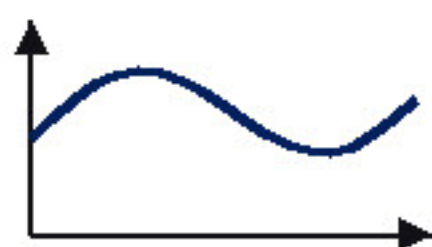
Wykres funkcji i przekształcenia

WYKRES PODSTAWOWY: $y = f(x)$



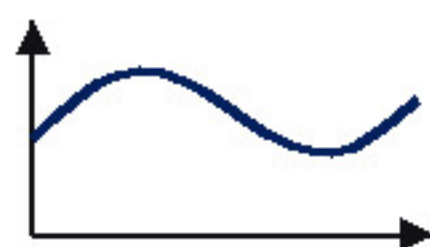
1. $y = f(x) + k$

przesunięcie pionowe



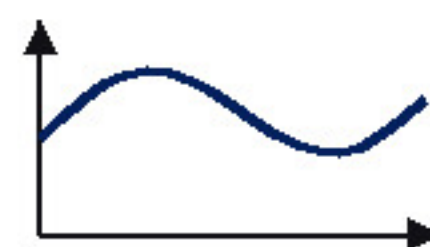
2. $y = f(x - h)$

przesunięcie poziome



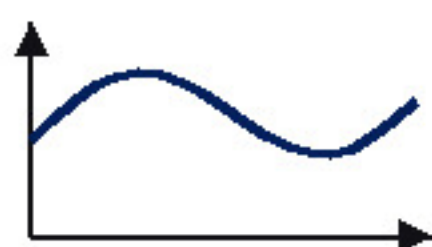
3. $y = -f(x)$

odbicie względem OX



4. $y = f(-x)$

odbicie względem OY



5. $y = a \cdot f(x)$

skalowanie pionowe



6. $y = f(bx)$

skalowanie poziome



Jak czytać przekształcenia

To, co jest w środku funkcji,
wpływa na kierunek poziomy.
To, co jest na zewnątrz funkcji,
wpływa na kierunek pionowy.

Przykład praktyczny

$y = x^2$

$y = -(x - 1)^2 + 2$

1. przesunięcie w prawo o 1
2. odbicie względem OX
3. przesunięcie w górę o 2

Funkcja odwrotna

Definicja

Funkcja odwrotna f^{-1} odwraca działanie funkcji f .

Dla każdego x zachodzi:

$$f^{-1}(f(x))=x \text{ oraz } f(f^{-1}(x))=x.$$

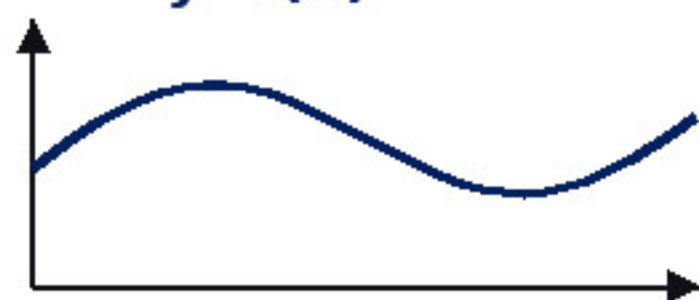
Warunek istnienia

Funkcja musi być wzajemnie jednoznaczna.

W praktyce często wystarczy ścisła monotoniczność na rozważanym przedziale.

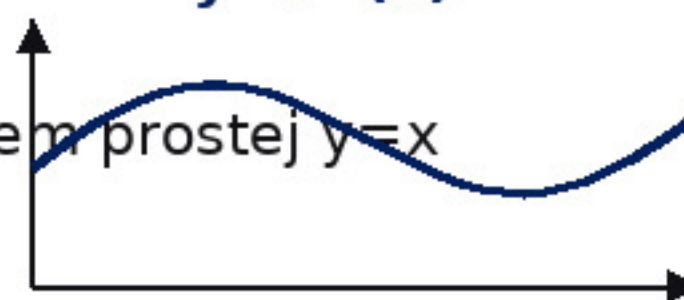
Pozioma prosta przecina wykres najwyżej w jednym punkcie.

$y=f(x)$



odbicie względem prostej $y=x$

$y=f^{-1}(x)$



Jak wyznaczyć funkcję odwrotną

1. Napisz $y=f(x)$.
2. Zamień x z y .
3. Rozwiąż równanie względem y .
4. Określ dziedzinę i zbiór wartości.

Przykład

$$f(x)=2x+3$$

$$x=2y+3$$

$$y=(x-3)/2$$

$$f^{-1}(x)=(x-3)/2$$



Ważna uwaga

Nie każda funkcja ma funkcję odwrotną na całej $\mathbb{R}$. Czasem trzeba ograniczyć dziedzinę, np. dla $f(x)=x^2$.



Funkcje elementarne



Funkcje elementarne to podstawowe typy funkcji, z których buduje się bardziej złożone wyrażenia. Każda z nich ma charakterystyczny wykres, dziedzinę oraz ważne własności.

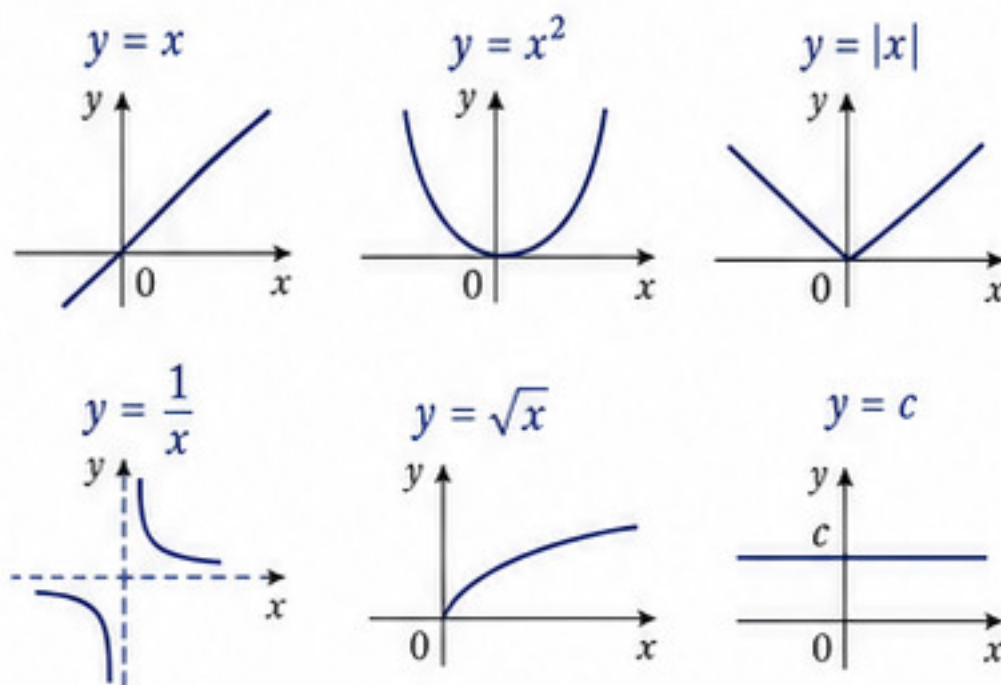
1. NAJWAŻNIEJSZE TYPY

① Funkcja stała	$f(x) = c$	$D = \mathbb{R}$ wykres: prosta pozioma	
② Funkcja liniowa	$f(x) = ax + b$	$D = \mathbb{R}$ wykres: prosta, współczynnik kierunkowy a	
③ Funkcja kwadratowa	$f(x) = ax^2 + bx + c$ $a \neq 0$	$D = \mathbb{R}$ wykres: parabola	
④ Funkcja potęgowa	$f(x) = x^n$	D zależy od n	
⑤ Funkcja wymierna	$f(x) = \frac{1}{x}$	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ asymptoty: $x = 0$ i $y = 0$	
⑥ Funkcja pierwiastkowa	$f(x) = \sqrt{x}$	$D = [0, +\infty)$	
⑦ Funkcja modułowa	$f(x) = x $	$D = \mathbb{R}$ wykres w kształcie „V”	

2. NA CO PATRZEĆ?

- dziedzina
- miejsca zerowe
- monotoniczność
- symetria
- przecięcia z osiami
- kształt wykresu

3. PRZYKŁADOWE WYKRESY



4. WŁASNOŚCI

- ★ Liniowa – jest monotoniczna (rosnąca dla $a > 0$, malejąca dla $a < 0$).
- ★ Kwadratowa – ma wierzchołek (minimum lub maksimum).
- ★ Modułowa – przyjmuje tylko wartości nieujemne: $f(x) \geq 0$.
- ★ Wymierna $1/x$ – nieokreślona dla $x = 0$.
- ★ Pierwiastkowa – zdefiniowana dla $x \geq 0$, rosnąca.
- ★ Stała – przyjmuje zawsze tę samą wartość.

5. PRZYKŁAD

Porównajmy dziedziny dwóch funkcji.

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

Aby pierwiastek był określony, musi być $x-2 \geq 0$.
Zatem $x \geq 2$.

$$\underline{D_f = [2, +\infty)}$$

$$g(x) = \frac{1}{x+1}$$

Mianownik nie może być zerem, czyli $x+1 \neq 0$.
Zatem $x \neq -1$.

$$\underline{D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$$



Funkcje wykładnicze i logarytmiczne



Funkcje wykładnicze i logarytmiczne opisują wzrost, skalę i zależności odwrotne. Są fundamentem wielu zagadnień w analizie i innych działach matematyki.

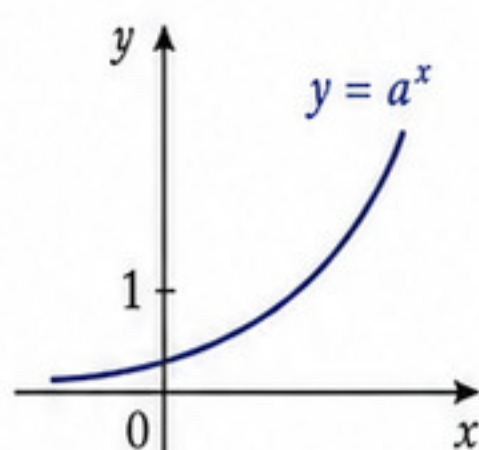
1. DEFINICJE

① Funkcja wykładnicza

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$W = (0, +\infty)$$

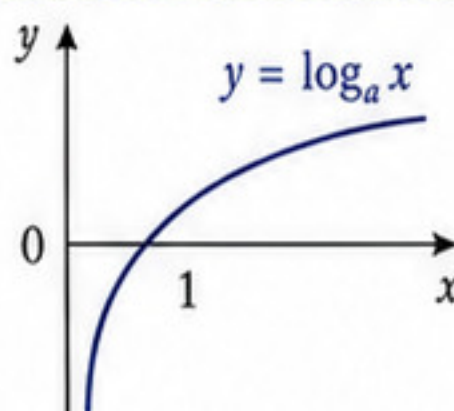


② Funkcja logarytmiczna

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$D = (0, +\infty)$$

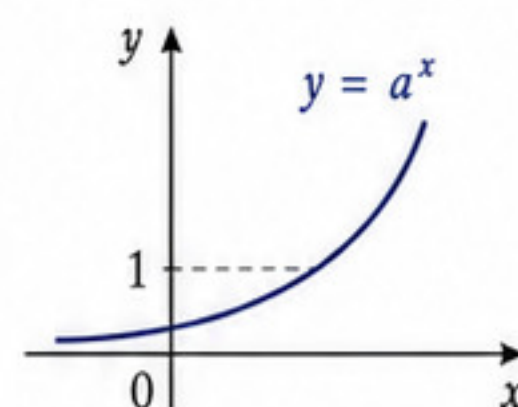
$$W = \mathbb{R}$$



2. WŁASNOŚCI I MONOTONICZNOŚĆ

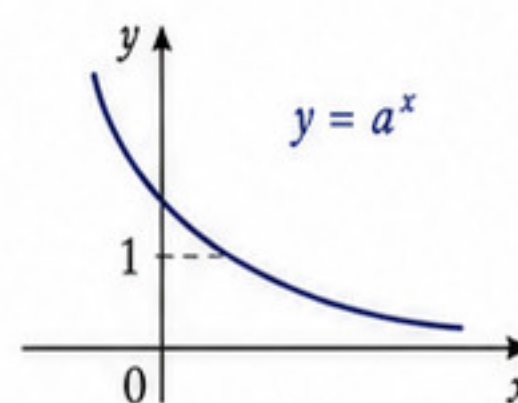
① Gdy $a > 1$

- funkcja rosnąca na $\mathbb{R}$
- $a^x > 0$ dla każdego x
- $a^x \rightarrow 0$ dla $x \rightarrow -\infty$
- $a^x \rightarrow +\infty$ dla $x \rightarrow +\infty$



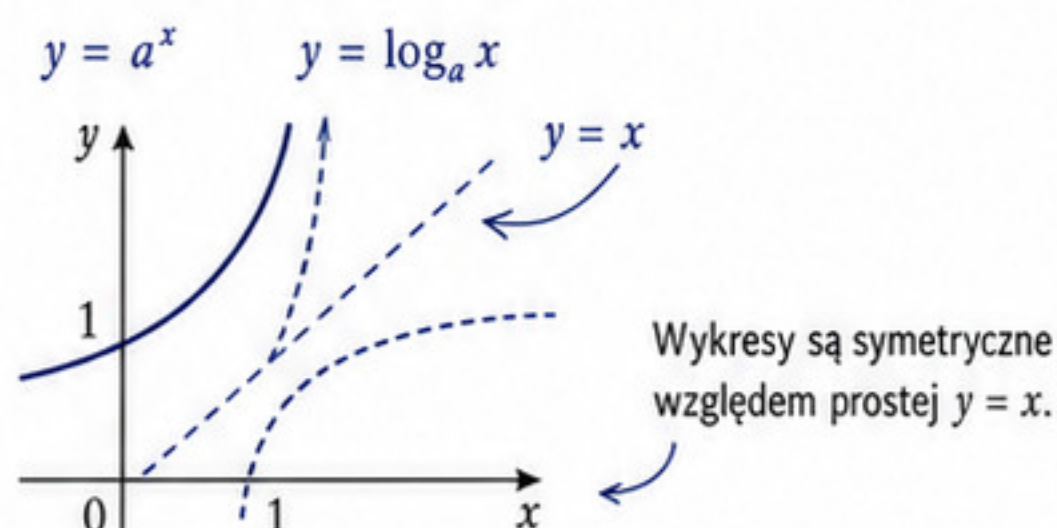
② Gdy $0 < a < 1$

- funkcja malejąca na $\mathbb{R}$
- $a^x > 0$ dla każdego x
- $a^x \rightarrow +\infty$ dla $x \rightarrow -\infty$
- $a^x \rightarrow 0$ dla $x \rightarrow +\infty$



3. ZWIĄZEK: FUNKCJE ODWROTNE

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna są funkcjami odwrotnymi.



4. NAJWAŻNIEJSZE WZORY

★ Wykładnicze:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

★ Logarytmiczne:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^k) = k \cdot \log_a x$$

★ Łączące:

$$a^{\log_a x} = x \quad (x > 0)$$

$$\log_a(a^x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

! PAMIĘTAJ!

Pamiętaj:
w logarytmie argument musi być dodatni.

5. PRZYKŁADY

① $2^x = 8$

$$2^x = 2^3$$

$$\underline{\underline{x = 3}}$$

② $\log_3 27 = 3$

$$3^3 = 27$$

$$\underline{\underline{3 = 3}}$$



Trygonometria – wzory i wykresy



Funkcje trygonometryczne opisują zależności kątowe w trójkącie prostokątnym i mają charakter periodyczny.

1. FUNKCJE TRYGNOMETRYCZNE

Funkcja	Dziedzina D	Zbiór wartości W	Okres
$\sin x$	$D = \mathbb{R}$	$W = [-1, 1]$	2π
$\cos x$	$D = \mathbb{R}$	$W = [-1, 1]$	2π
$\operatorname{tg} x$	$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\},$ $k \in \mathbb{Z}$	$W = \mathbb{R}$	π

2. WAŻNE WZORY

$$\star \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\star \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\star 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

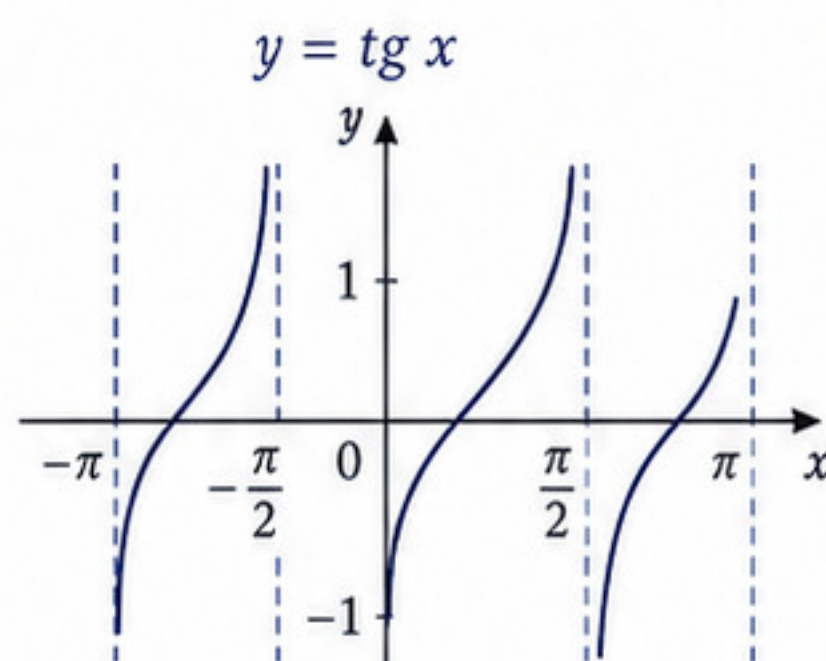
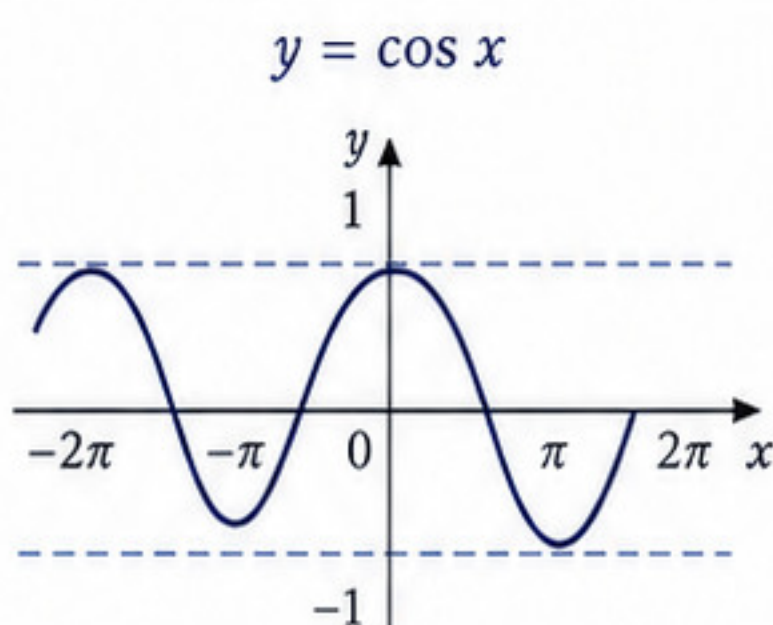
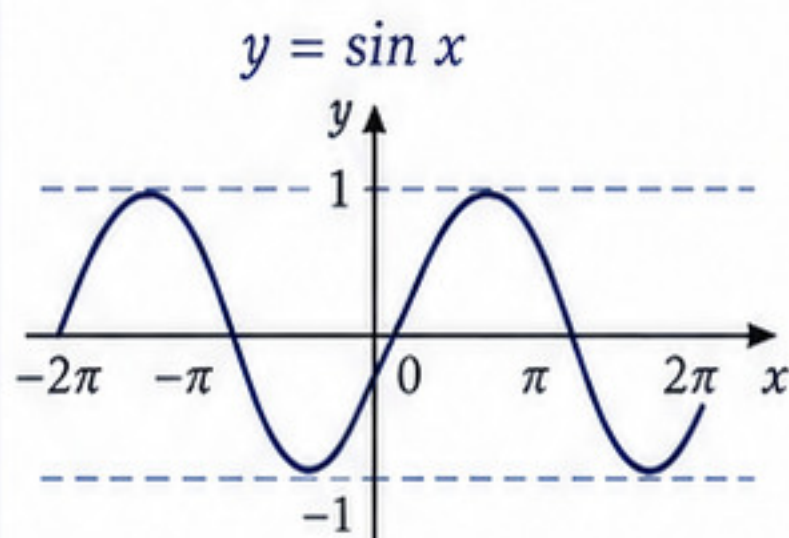
$$\star \sin(-x) = -\sin x$$

$$\star \cos(-x) = \cos x$$

3. WARTOŚCI DLA WYBRANYCH KĄTÓW

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	nie istnieje

4. WYKRESY FUNKCJI



$\operatorname{tg} x$ nie istnieje, gdy $\cos x = 0$.



02

Granice i ciągłość



Ten moduł porządkuje pojęcie granicy, granice jednostronne i dwustronne, działania na granicach, podstawowe schematy obliczeń, formy nieoznaczone, granice w nieskończoności, asymptoty oraz ciągłość i nieciągłość funkcji.

 $\lim$ $x \rightarrow a$ $\frac{0}{0}$ $\sqrt{}$ ∞ 



Pojęcie granicy i notacja

1. INTUICYJNA DEFINICJA GRANICY



Mówimy, że $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, jeśli wartości funkcji $f(x)$ mogą być dowolnie blisko liczby L , gdy x jest dostatecznie blisko a . Granica opisuje zachowanie funkcji w pobliżu punktu a , a niekoniecznie wartość funkcji w tym punkcie.

2. JAK CZYTAĆ ZAPIS?

$x \rightarrow a$ x dąży do a (bez określania strony).

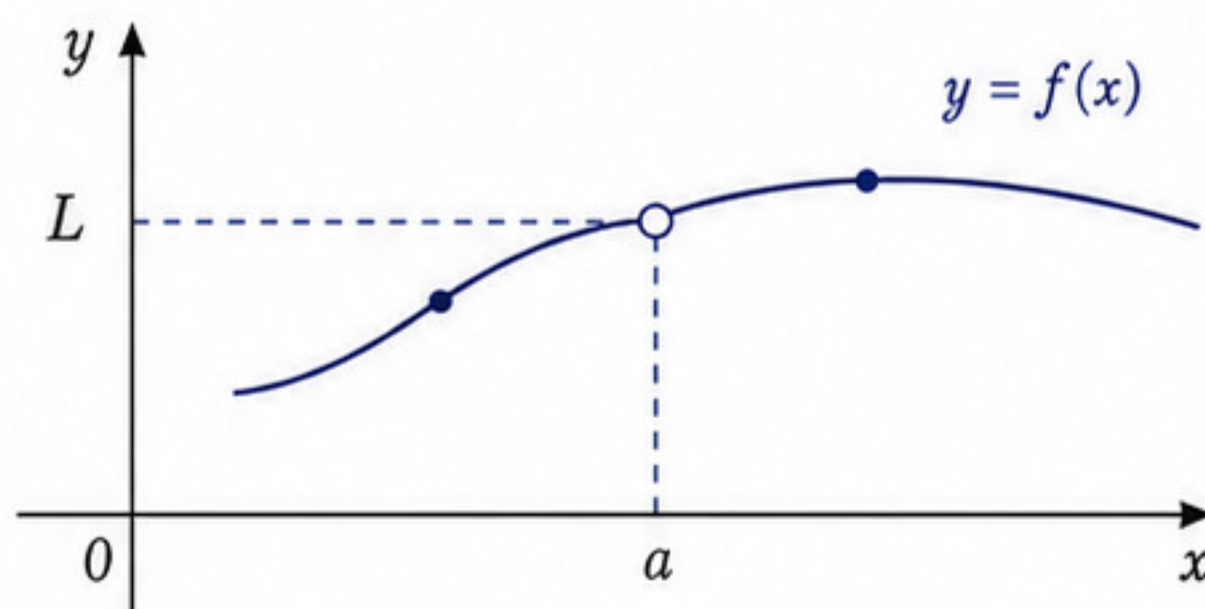
$x \rightarrow a^+$ x dąży do a od prawej strony ($x > a$).

$x \rightarrow a^-$ x dąży do a od lewej strony ($x < a$).

$x \rightarrow +\infty$ x dąży do plus nieskończoności (x rośnie bez ograniczeń).

$x \rightarrow -\infty$ x dąży do minus nieskończoności (x maleje bez ograniczeń).

3. CO OZNACZA GRANICA NA WYKRESIE?



Gdy x dąży do a , wartości $f(x)$ zbliżają się do L .

Punkt (a, L) może nie należeć do wykresu (kółko otwarte), bo granica dotyczy zachowania w pobliżu punktu.

4. WAŻNA OBSERWACJA



Granica może istnieć nawet wtedy, gdy $f(a)$ nie istnieje (funkcja nie jest określona w punkcie a) albo gdy $f(a) \neq L$.

Granica opisuje otoczenie punktu, a nie jego wartość w samym punkcie.

5. PRZYKŁAD

Obliczmy $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1)$.

Ponieważ funkcja $f(x) = 3x + 1$ jest wielomianem, a więc ciągła w każdym punkcie, granica jest równa wartości funkcji w punkcie 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = \underline{7}$$



Granice jednostronne i dwustronne



Granice opisują zachowanie funkcji w pobliżu punktu.

Możemy badać je z lewej strony ($-$), z prawej strony ($+$) lub z obu stron.

1. DEFINICJE

- ① Granica lewostronna w punkcie a

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

jeśli wartości $f(x)$ dążą do L , gdy x zbliża się do a **od lewej** strony.

- ② Granica prawostronna w punkcie a

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

jeśli wartości $f(x)$ dążą do L , gdy x zbliża się do a **od prawej** strony.

- ③ Granica dwustronna w punkcie a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

jeśli wartości $f(x)$ dążą do L , gdy x zbliża się do a **z obu stron**.

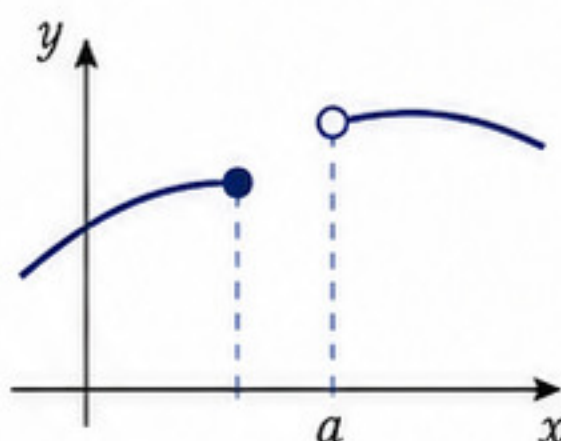
2. ZASADA GŁÓWNA

Granica dwustronna istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy granice jednostronne istnieją i są równe.

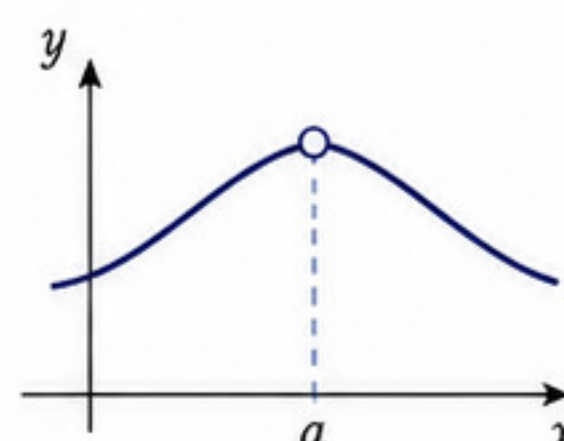
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

3. ILUSTRACJE

Granice jednostronne różne
— granica dwustronna
nie istnieje.



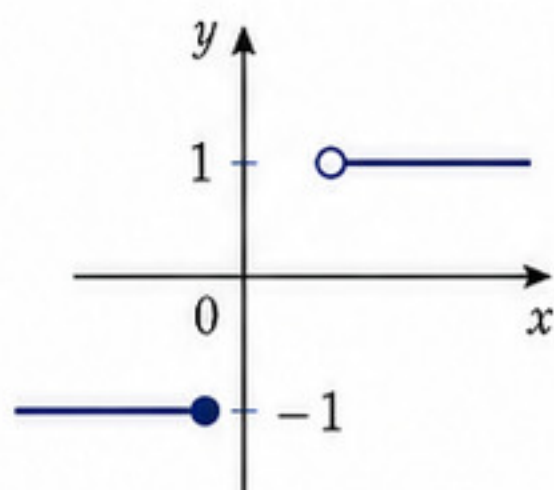
Granice jednostronne równe
— granica dwustronna
istnieje.



4. PRZYKŁAD A

Funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{gdy } x < 0, \\ 1, & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$$

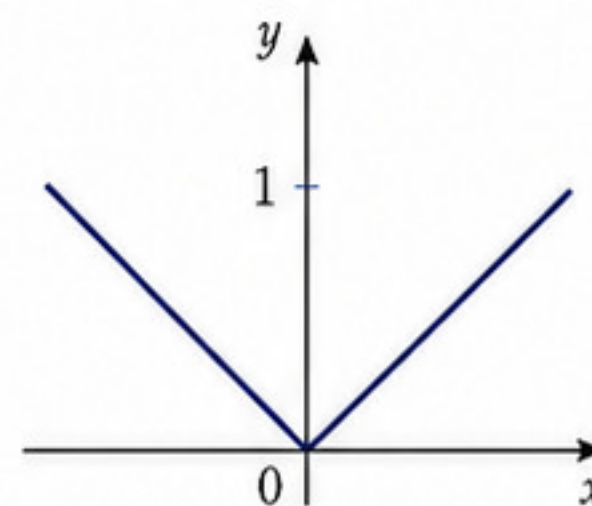


$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ nie istnieje.}$$

5. PRZYKŁAD B

Funkcja: $f(x) = |x|$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$



Działania na granicach i podstawowe twierdzenia



Jeśli istnieją granice funkcji $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ oraz $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$,
to możemy stosować następujące działania algebraiczne na granicach.

1. DZIAŁANIA NA GRANICACH

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = A - B$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = cA$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = AB$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad \text{jeśli } B \neq 0$$

$$\textcircled{6} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = A^n \quad n \in \mathbb{N}$$

2. PODSTAWOWE TWIERDZENIA



Twierdzenie o zachowaniu nierówności

Jeśli w pewnym otoczeniu punktu a zachodzi $f(x) \leq g(x)$, to

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$$

implikuje $A \leq B$.



Twierdzenie o trzech funkcjach

Jeśli w pewnym otoczeniu punktu a zachodzi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A,$$

to $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$.



Twierdzenie o funkcjach ciągłych

Jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie a ,
to $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Wtedy granicę otrzymujemy przez bezpośrednie podstawienie.

3. PRZYKŁAD 1

Oblicz granicę $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x)$.

Wielomiany są ciągłe, więc podstawiamy bezpośrednio $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x) = (2)^2 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x) = 10}$$

4. PRZYKŁAD 2

Oblicz granicę $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$.

Mianownik w punkcie $x = 1$ jest niezerowy ($1 + 1 = 2 \neq 0$),
więc możemy podstawiać bezpośrednio:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1^2 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0}$$



Granice oznaczone – podstawowe schematy



Jeżeli po podstawieniu bezpośrednim nie pojawia się forma nieoznaczona, granicę zwykle obliczamy przez podstawienie.

1. SCHEMAT POSTĘPOWANIA

- 1 Sprawdź punkt graniczny.
- 2 Podstaw bezpośrednio.
- 3 Oceń, czy wynik jest oznaczony.
- 4 Zapisz odpowiedź.

2. NAJCZĘSTSZE PRZYPADKI

$x^2 + 1$ Wielomiany.

$\frac{p(x)}{q(x)}$ Funkcje wymierne z mianownikiem $\neq 0$ w punkcie granicznym.

$\sqrt{x}$ Pierwiastki przy spełnionej dziedzinie.

$\ln x$ Logarytmy dla dodatniego argumentu.

$\sin x$ Funkcje trygonometryczne w punktach swojej dziedziny.

3. PRZYKŁADY

① $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 1)$

$$= 3^2 - 1$$

$$= 9 - 1$$

$$= \underline{8}$$

② $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{x - 5}$

$$= \frac{2 + 1}{2 - 5}$$

$$= \frac{3}{-3}$$

$$= \underline{-1}$$

③ $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x + 5}$

$$= \sqrt{4 + 5}$$

$$= \sqrt{9}$$

$$= \underline{3}$$

④ $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x$

$$= \ln 1$$

$$= \underline{0}$$



Jeżeli po podstawieniu bezpośrednim otrzymujemy $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ lub inną formę nieoznaczoną, konieczne jest zastosowanie innej metody.



Nieoznaczoność 0/0 – faktoryzacja i skracanie



Jeśli po podstawieniu bezpośrednim otrzymujemy nieoznaczoność **0/0**, często możemy rozłożyć licznik i mianownik na czynniki, skrócić wspólne czynniki, a następnie obliczyć granicę uproszczonego wyrażenia.

1. SCHEMAT

- ① Rozłóż licznik i mianownik na czynniki.
↓
- ② Skróć wspólny czynnik.
↓
- ③ Oblicz granicę uproszczonego wyrażenia.

2. PRZYPOMNIENIE WZORÓW

- ★ Różnica kwadratów:
 $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$
- ★ Wyłączanie wspólnego czynnika:
 $ax + ay = a(x + y)$
- ★ Podobnie:
 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

3. UŻYTECZNE PRZYPOMNIENIA

- ✓ Skracamy tylko wspólne czynniki (nie zmieniamy dziedziny).
- ✓ Po skróceniu obliczamy granicę jak zwykle.
- ✓ Po skróceniu pamiętaj o wykluczeniu miejsc, w których mianownik = 0.

4. PRZYKŁAD A

Oblicz $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

- ① Podstawienie bezpośrednie:
 $\frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$
nieoznaczoność 0/0
- ② Faktoryzacja licznika:
 $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$
- ③ Skracanie:
 $\frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$
(dla $x \neq 1$)
- ④ Granicą uproszczonego wyrażenia:
 $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = \underline{2}$

Ograniczenie: oryginalne wyrażenie nie jest określone dla $x = 1$.
Zatem rozpatrujemy granicę po usunięciu tego punktu: $x \neq 1$.

5. PRZYKŁAD B

Oblicz $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

- ① Podstawienie bezpośrednie:
 $\frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$
nieoznaczoność 0/0
- ② Faktoryzacja licznika:
 $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$
- ③ Skracanie:
 $\frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$
(dla $x \neq 2$)
- ④ Granicą uproszczonego wyrażenia:
 $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = \underline{4}$

Ograniczenie: oryginalne wyrażenie nie jest określone dla $x = 2$.
Zatem rozpatrujemy granicę po usunięciu tego punktu: $x \neq 2$.



UWAGA! Po skróceniu zawsze sprawdź, czy nie wypadło miejsce, w którym mianownik był równy 0. W takich punktach wyrażenie wyjściowe nie jest określone, nawet jeśli granica istnieje.



Usuwanie niewymierności



Gdy w granicach pojawiają się wyrażenia zawierające pierwiastki, które prowadzą do postaci nieoznaczonych, np. $\frac{0}{0}$, często stosujemy wyrażenie sprzężone.

1. SPRZĘŻENIE

$$(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B$$

Wyrażenia $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ i $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ (to wyrażenia **sprzężone**), ponieważ ich iloczyn nie zawiera pierwiastków.

2. SCHEMAT

- 1 Pomnóż licznik i mianownik przez wyrażenie sprzężone.
- 2 Zastosuj wzór na różnicę kwadratów.
- 3 Uprość wyrażenie.
- 4 Podstaw wartość graniczną.

3. PRZYKŁAD A

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1}$$

$$\textcircled{2} \quad = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - 1^2}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \quad (A^2 - B^2 = (A-B)(A+B))$$

$$\textcircled{3} \quad = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$$

$$\textcircled{4} \quad = \frac{1}{\sqrt{0+1} + 1} = \frac{1}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

4. PRZYKŁAD B

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}$$

$$\textcircled{2} \quad = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x-4)(\sqrt{x} + 2)} \quad (A^2 - B^2 = (A-B)(A+B))$$

$$\textcircled{3} \quad = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$\textcircled{4} \quad = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{2+2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$



UWAŻAJ! Którą część wyrażenia trzeba sprzęgać — **nie zawsze mianownik.**



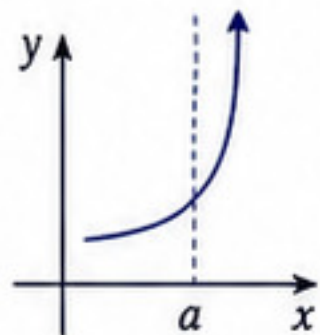
Granice nieskończone i formy nieoznaczone

Kiedy funkcja rośnie bez ograniczeń i kiedy zapis z ∞ wymaga dodatkowej analizy

1. Granica równa $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

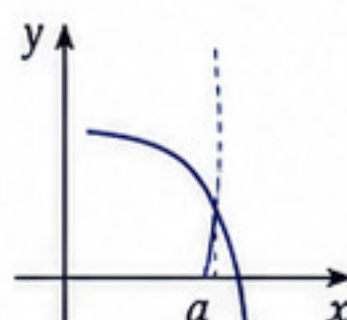
Wartości $f(x)$ rosną bez ograniczenia, gdy x zbliża się do a .



2. Granica równa $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Wartości funkcji maleją bez ograniczenia.



3.



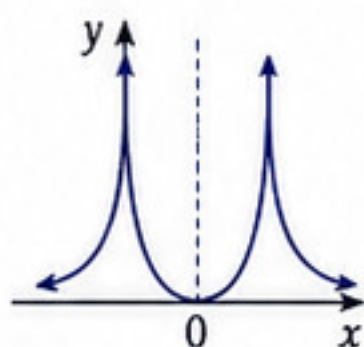
∞ to symbol opisujący zachowanie, a nie zwykła liczba.

4. Przykład: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ dla $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Obie strony rosną bez ograniczenia.

Asymptota pionowa: $x = 0$.

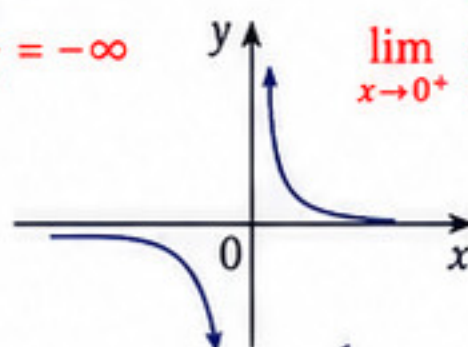


5. Zachowanie jednostronne: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Granica dwustronna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ nie istnieje.



6. Co to jest forma nieoznaczona?

Podstawienie prowadzi do zapisu nie dającego jednoznacznej informacji o wartości granicy.

Nieoznaczoność $\neq$ wynik

Trzeba przekształcić wyrażenie i dopiero wtedy wyciągać wnioski.

7. Najważniejsze formy nieoznaczone

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- 1^∞
- 0^0
- ∞^0

Podstawienie daje jedną z tych form $\rightarrow$ granica nie jest jeszcze znana.

8. Uwaga o $\frac{\infty}{\infty}$

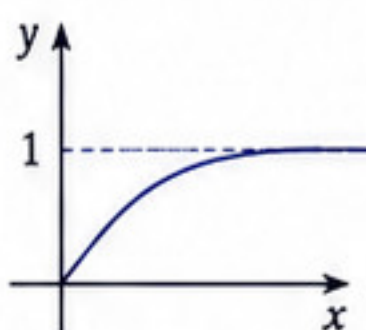
Forma $\frac{\infty}{\infty}$ może prowadzić do:

- liczby skończonej,
- $+\infty$ lub $-\infty$,
- innej formy nieoznaczonej.

nie wolno „skracać nieskończoności”.

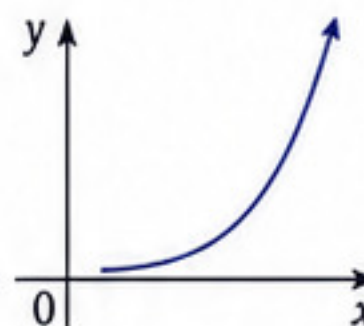
9.-11. Ta sama forma $\rightarrow$ trzy różne wyniki

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 1$$



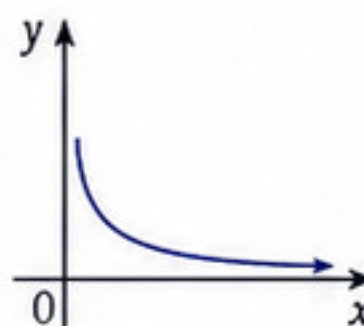
Wynik skończony.

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$



Nieskończoność.

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = 0$$



Granica równa 0.

12. Przykład formy $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

Podstawienie: $\infty - \infty$.

Nie możemy stwierdzić, że $\infty - \infty = 0$.

Często potrzebne jest sprzężenie:

$$\sqrt{x^2 + x} - x \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

13. Przykład formy $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

Podstawienie: $0 \cdot \infty$.

Po uproszczeniu otrzymujemy wyrażenie o granicy równej 1.

14. Plan działania



15. Najczęstsze techniki przekształceń

$$(a \cdot b)$$

faktoryzacja

$$\overline{x}^n$$

dzielenie przez najwyższą potęgę

$$(a-b)(a+b)$$

sprzężenie

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

wspólny mianownik

później:



reguła de l'Hospitala, jeśli należy do programu

16. $\times$ TO NIE SĄ OGÓLNE REGUŁY!

- $\frac{\infty}{\infty} = 1$
- $\infty - \infty = 0$
- $0 \cdot \infty = 0$



Najpierw nazwij formę.

Dopiero potem wybierz technikę.

18. Mapa podejścia do granicy

podstawienie

forma oznaczona?

Tak

oblicz.

Nie

rozpoznał nieoznaczoność

przekształć wyrażenie



Granice w nieskończoności i asymptoty

Co dzieje się z funkcją, gdy x staje się bardzo duży lub bardzo mały?

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

Wartości funkcji $f(x)$ zbliżają się do liczby L , gdy x rośnie bez ograniczeń.

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$

Wartości funkcji $f(x)$ zbliżają się do liczby L , gdy x maleje bez ograniczeń.

③ Jeśli $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$,

to prosta $y = L$ jest **poziomą asymptotą** wykresu funkcji po odpowiedniej stronie.

④ Przykład: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ jest poziomą asymptotą wykresu.



Dla funkcji wymiernej $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P, Q – wielomiany, zachowanie w nieskończoności zależy głównie od najwyższych potęg x w P i Q .

⑥ $\deg P < \deg Q$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

Asymptota pozioma: $y = 0$.

⑦ $\deg P = \deg Q$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\text{wsp. wiodący } P}{\text{wsp. wiodący } Q}$$

Przykład: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{2x^2 - 5} = \frac{3}{2}$

Asymptota pozioma: $y = \frac{3}{2}$.

⑧ $\deg P > \deg Q$

Z reguły nie ma asymptoty poziomej.

Funkcja może rosnąć/ maleć do ∞ lub mieć asymptotę ukośną.

⑨ Metoda uniwersalna dla funkcji wymiernych:
Podziel licznik i mianownik przez najwyższą odpowiednią potęgę x .

⑩ Przykład: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{5x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{5}$

⑪ **Asymptota pionowa**

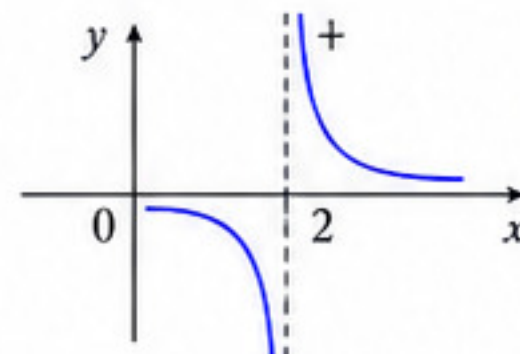
Jeśli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, to prosta $x = a$ może być asymptotą pionową wykresu.

⑫ Przykład: $f(x) = \frac{1}{x-2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$\Rightarrow x = 2$ jest asymptotą pionową.



⑬ **Asymptota ukośna**

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną po stronie $+\infty$ (lub $-\infty$), jeśli $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

⑭ Jak znaleźć a ?

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

⑮ Jak znaleźć b ?

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$$

⑯ Przykład: $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$$f(x) - x = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

stąd $y = x$ jest asymptotą ukośną.

⑰ **NAJCZĘSTSZE BŁĘDY!**



- ✗ Asymptota może być przecinana przez wykres.
- ✗ Asymptota pozioma nie jest maksimum.
- ✗ Trzeba sprawdzać także $x \rightarrow -\infty$.

⑱ **MAPA PODSUMOWANIA**



$x \rightarrow a \quad f \rightarrow \infty \text{ (lub } -\infty) \Rightarrow$ asymptota pionowa



$x \rightarrow \infty \text{ (lub } -\infty) \quad f \rightarrow L \Rightarrow$ asymptota pozioma



$x \rightarrow \infty \text{ (lub } -\infty) \quad f \approx ax + b \Rightarrow$ asymptota ukośna



Ciągłość

Kiedy wykres można narysować bez odrywania ołówka?

1. KLUCZOWY WARUNEK

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

2. CIĄGŁOŚĆ W PUNKCIE a

Funkcja f jest ciągła w punkcie a , gdy jednocześnie:

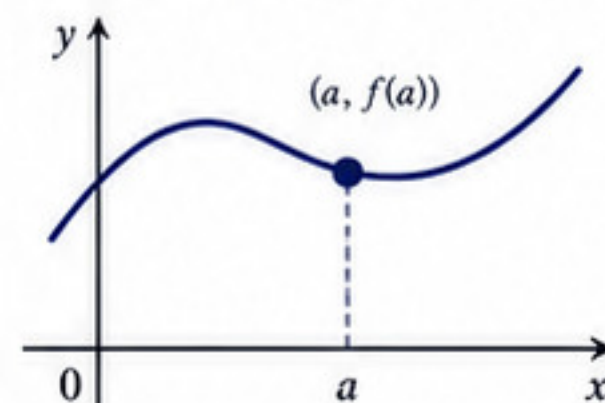
- ① $f(a)$ istnieje
- ② $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ istnieje
- ③ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

3. INTUICJA



Wartość funkcji w punkcie zgadza się z zachowaniem funkcji wokół punktu.

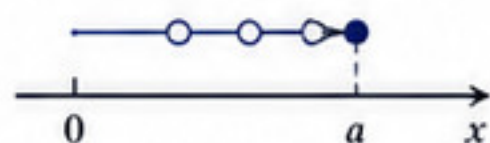
4. WYKRES CIĄGŁY W a



5. CIĄGŁOŚĆ Z LEWEJ STRONY

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

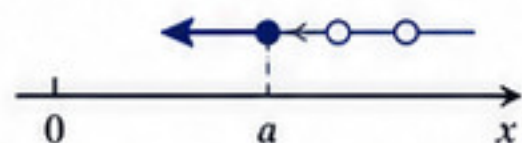
Wartości funkcji z lewej zbliżają się do $f(a)$.



6. CIĄGŁOŚĆ Z PRAWEJ STRONY

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Wartości funkcji z prawej zbliżają się do $f(a)$.



7. CIĄGŁOŚĆ DWUSTRONNA

Aby funkcja była ciągła w punkcie a , musi być ciągła z lewej i z prawej strony, czyli muszą być spełnione warunki ⑤ i ⑥ oraz ①-③.

8. PRZYKŁAD: WIELOMIANY

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

Funkcje wielomianowe są ciągłe na całej prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$.

9. PRZYKŁAD: FUNKCJA WYMIERNA

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Ciągła na $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Nie określona w $x = 2$.

10. PRZYKŁAD: $\sqrt{x}$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Ciągła na $[0, +\infty)$.

Dziedzina: $x \geq 0$.

11. PRZYKŁAD: $\ln x$

$$f(x) = \ln x$$

Ciągła na $(0, +\infty)$.

Dziedzina: $x > 0$.

12. FUNKCJE TRYGO.

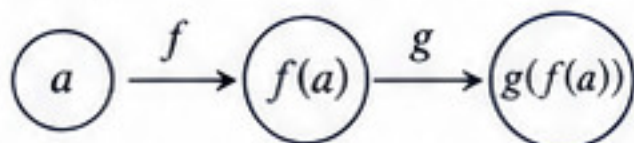
$$f(x) = \sin x, \cos x$$

Ciągłe na $\mathbb{R}$.

$f(x) = \tan x$ jest ciągła na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

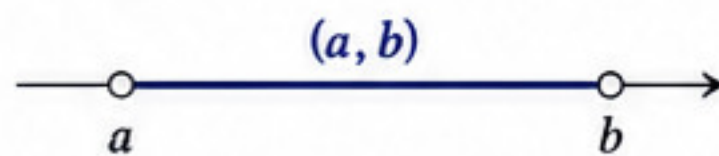
13. SKŁADANIE FUNKCJI

Jeśli f jest ciągła w punkcie a oraz g jest ciągła w punkcie $f(a)$, to $g \circ f$ jest ciągła w punkcie a , o ile jest w nim określona.



14. CIĄGŁOŚĆ NA PRZEDZIALE OTWARTYM

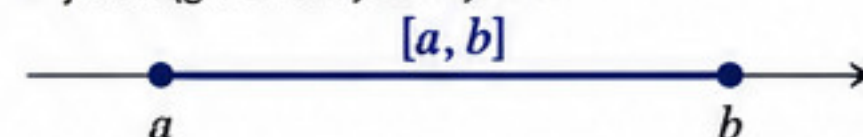
Funkcja f jest ciągła na (a, b) , jeśli jest ciągła w każdym punkcie $x \in (a, b)$.



15. CIĄGŁOŚĆ NA PRZEDZIALE ZAMKNIĘTYM

Funkcja f jest ciągła na $[a, b]$, gdy:

- jest ciągła w każdym punkcie $x \in (a, b)$,
- jest ciągła z prawej strony w a ,
- jest ciągła z lewej strony w b .



16. PRZYKŁAD — FUNKCJA OKREŚLONA

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x < 1 \\ 2x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

Granica z lewej strony w $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2$$

Granica z prawej strony w $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2$$

Wartość funkcji w punkcie:

$$f(1) = 2$$



f jest ciągła w $x = 1$.

17. KIEDY NIE JEST CIĄGŁA?

Funkcja f nie jest ciągła w punkcie a , gdy co najmniej jeden z warunków ①-③ nie jest spełniony.

18. WAŻNA ZALEŻNOŚĆ

Granica może istnieć bez ciągłości, ale ciągłość wymaga odpowiedniej granicy.

19. TYPOWE BŁĘDY



- sprawdzanie tylko wartości $f(a)$,
- zapominanie o dziedzinie funkcji,
- zapominanie o jednostronnych warunkach na krańcach przedziału.

20. TEST CIĄGŁOŚCI W PUNKCIE a



$D(f)$?



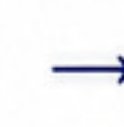
$f(a)$?



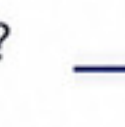
L^- ?
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$



L^+ ?
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$



L ?
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$



czy $L = f(a)$?





Nieciągłości

Jak rozpoznać, dlaczego funkcja przestaje być ciągła?

1. DEFINICJA PRAKTYCZNA

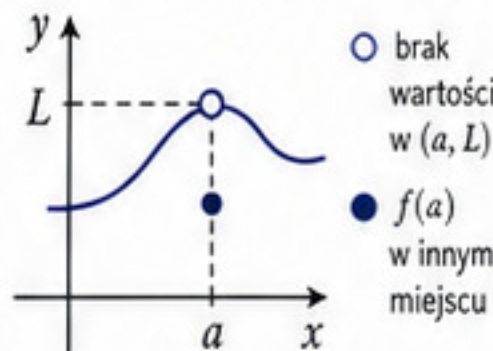


Funkcja jest nieciągła w punkcie a , gdy nie spełniony jest przynajmniej jeden z warunków ciągłości w a .

2. TYP 1: USUWALNA

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ istnieje i jest skończony, ale $f(a)$ nie istnieje lub $f(a) \neq L$.

3. WYKRES (USUWALNA)



4. PRZYKŁAD (USUWALNA)

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, x \neq 1$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$f(1)$ nie jest określona.

5. JAK USUNĄĆ?

Zdefiniuj wartość zgodną z granicą:

$$f(1) = 2$$

Teraz funkcja jest ciągła w $x = 1$.

6. TYP 2: SKOKOWA

Obie granice jednostronne istnieją, są skończone, ale są różne.

$$L_1 \neq L_2$$

7. WIELKOŚĆ SKOKU

$$S = L_2 - L_1$$

- $S > 0$ – skok w górę
- $S < 0$ – skok w dół
- $|S|$ – wartość skoku

8. PRZYKŁAD (SKOKOWA)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 = L_2$$

$$\text{Skok} = 2 - 0 = 2 \text{ (w górę)}$$

9. TYP 3:

NIESKOŃCZONA

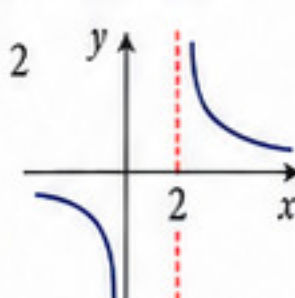
Co najmniej jedna z granic jednostronnych jest równa $+\infty$ lub $-\infty$.

10. PRZYKŁAD (NIESKOŃCZONA)

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ w } x=2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

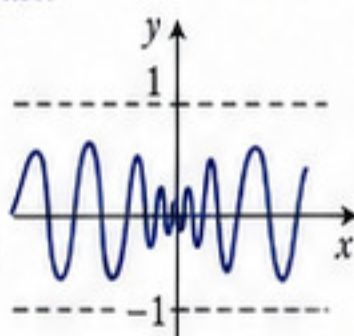


Asymptota pionowa: $x = 2$

11. DODATKOWA KATEGORIA: OSCYLACYJNA

Granice jednostronne nie istnieją, bo funkcja oscyluje w pobliżu a .

Przykład: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ w $x \rightarrow 0$ oscyluje między -1 i 1 .



12. WAŻNE!

Sama wartość $f(a)$ nie decyduje o typie nieciągłości. Klasyfikacja zależy głównie od granic jednostronnych i ich relacji do $f(a)$.

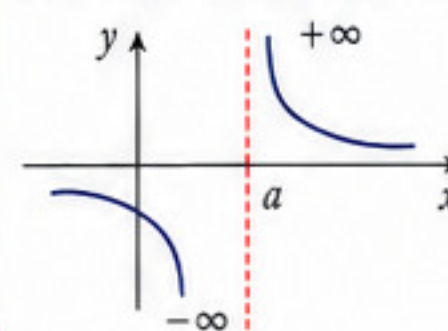
13. PROCEDURA DIAGNOSTYCZNA

1. Sprawdź dziedzinę: czy $a \in D_f$?
2. Oblicz $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L^-$
3. Oblicz $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L^+$
4. Porównaj L^- i L^+
5. Sprawdź $f(a)$ (czy istnieje?)
6. Zaklasyfikuj nieciągłość.

14. KLASYFIKACJA NIECIĄGŁOŚCI

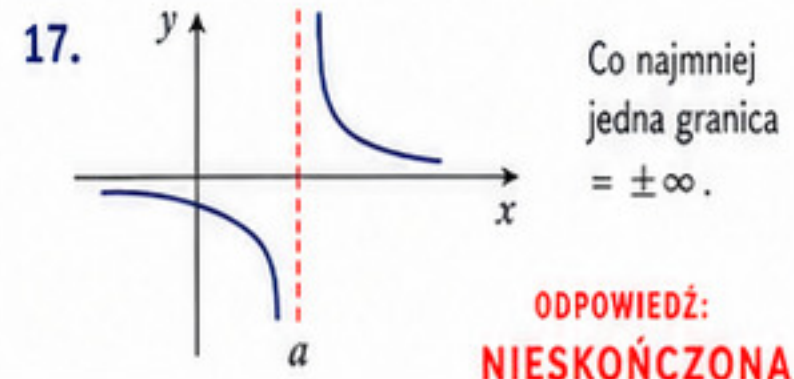
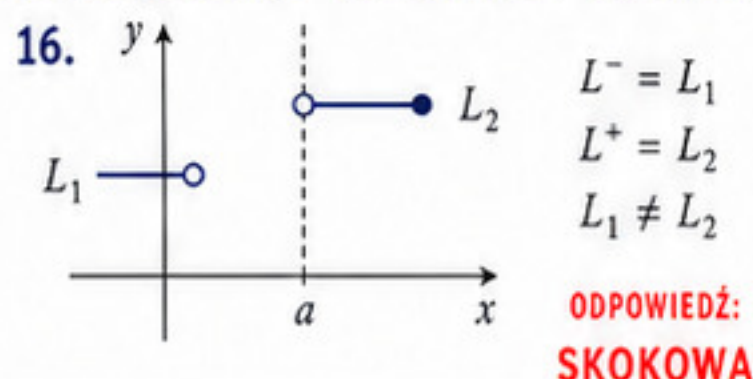
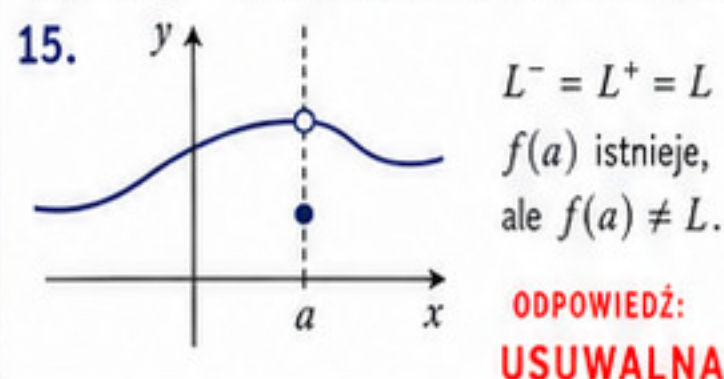
Typ	L^-	L^+	$f(a)$	Uwagi
Usuwalna	istnieje ($= L$)	istnieje ($= L$)	nie istnieje lub $\neq L$	Można „uzdrowić” definiując $f(a) = L$.
Skokowa	istnieje ($= L_1$)	istnieje ($= L_2$) $L_1 \neq L_2$	może istnieć lub nie	Skok $= L_2 - L_1$.
Nieskończona	$\pm\infty$ lub istnieje	$\pm\infty$ lub istnieje	może istnieć lub nie	Zwykle asymptota pionowa.

18. A CO Z ASYMPTOTAMI?



Nieciągłość nieskończona jest często związana z asymptotą pionową $x = a$.

15–17. PRZYKŁADY DIAGNOSTYCZNE – JAK ROZPOZNAĆ? (ODPOWIEDZ I UZASADNIJ)



19. NAJCZĘSTSZE BŁĘDY



- Każda dziura na wykresie to **nie** skok.
- **Nie** myl wartości funkcji z granicą.
- Zawsze licz oba boki oddzielnie!

20. SZYBKA MAPA NA KONIEC

RÓWNE GRANICE
+ ZŁA WARTOŚĆ
↓
USUWALNA

RÓŻNE GRANICE
SKOŃCZONE
↓
SKOKOWA

CO NAJMNIEJ
JEDNA $\pm\infty$
↓
NIESKOŃCZONA



03

Pochodne

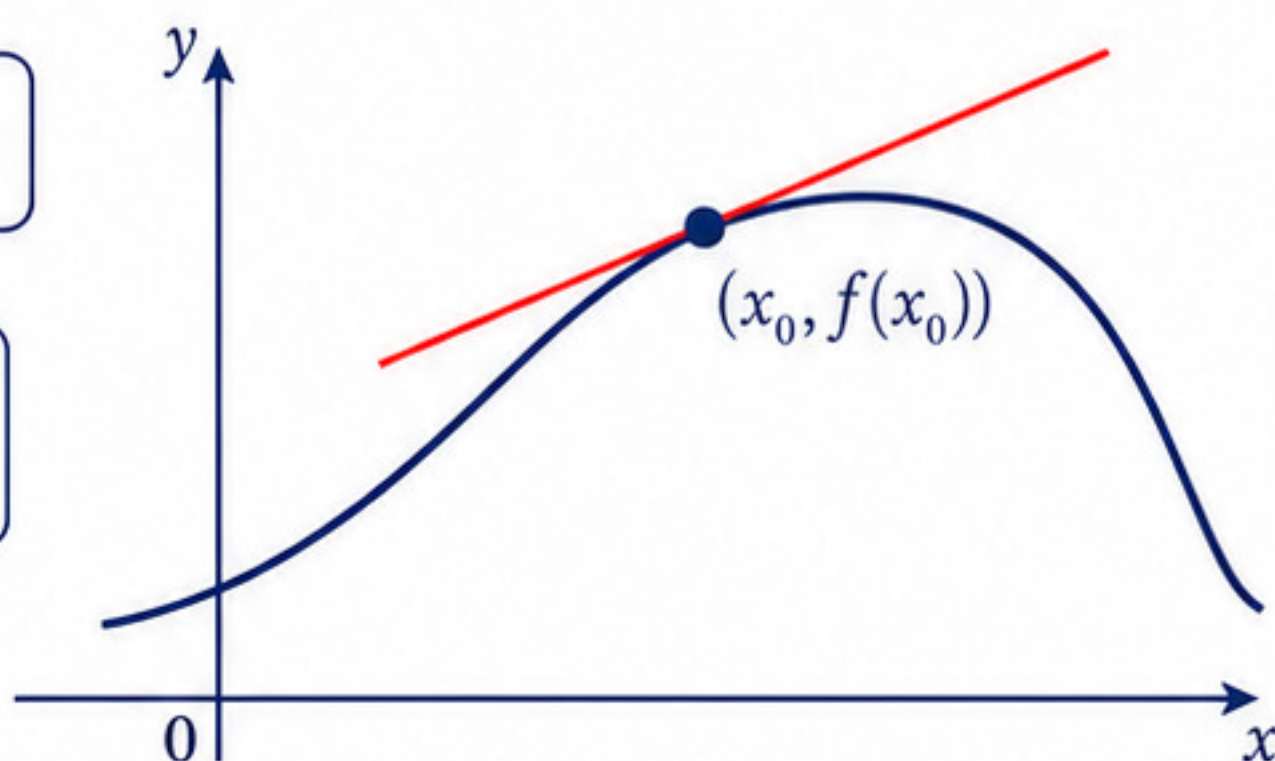
Od tempa zmiany do pełnej analizy przebiegu funkcji



Cel modułu: zrozumieć, czym jest pochodna, nauczyć się ją obliczać, interpretować geometrycznie i fizycznie oraz wykorzystywać do badania monotoniczności, ekstremów, wypukłości i przebiegu funkcji.

$$f'(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$



$$\frac{dy}{dx}$$

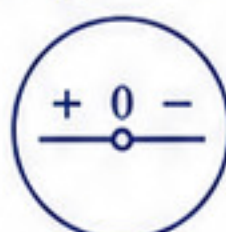
$$v(t) = s'(t)$$

$$f''(x)$$

- definicja pochodnej • iloraz różnicowy • interpretacja geometryczna
• interpretacja fizyczna • tablica pochodnych • reguły różniczkowania
• reguła łańcuchowa • funkcje wykładnicze i logarytmiczne • trygonometria
• styczna • monotoniczność • ekstrema • druga pochodna

„Pochodna odpowiada na pytanie: jak szybko zmienia się funkcja?”

funkcja → pochodna → znak pochodnej → wnioski o wykresie





Pochodna — definicja

Granica ilorazu różnicowego i lokalne tempo zmiany funkcji

1. DEFINICJA

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

o ile granica istnieje.

2. RÓWNOWAŻNA POSTAĆ

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

3. ZNACZENIE



Lokalne tempo zmiany funkcji w punkcie.

4. ILORAZ RÓŻNICOWY

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

to średnie tempo zmiany funkcji na małym przedziale $[a, a+h]$.

5. PRZEJŚCIE DO POCHODNEJ

Gdy $h \rightarrow 0$, średnie tempo zmiany dąży do chwilowego (natychmiastowego) tempa zmiany, czyli do pochodnej w punkcie a .

6. NOTACJE POCHODNEJ

$f'(x)$ (czyt. „f prim x”)

y' (gdy $y = f(x)$)

$\frac{dy}{dx}$ (Leibniz)

$\frac{df}{dx}$ (różniczka funkcji f)

7. PRZYKŁAD: POCHODNA $f(x) = x^2$

Z definicji:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

8. ROZWINIĘCIE

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

9. UPROSZCZENIE

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h)$$

10. GRANICA

$$f'(x) = 2x + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2x$$

$$f'(x) = 2x$$

11. WARTOŚĆ W PUNKCIE

Dla $x = 3$:

$$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$f'(3) = 6$$

12. FUNKCJA STAŁA

Jeśli $f(x) = c$ (stała), to:

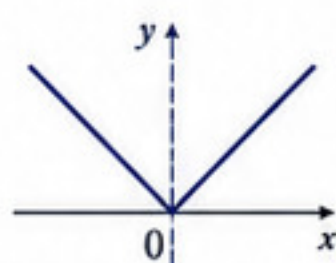
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

Interpretacja:

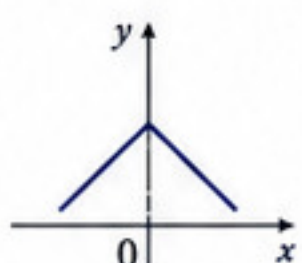
Funkcja stała nie zmienia się — jej tempo zmiany jest równe 0.

13. KIEDY POCHODNA MOŻE NIE ISTNIEĆ?

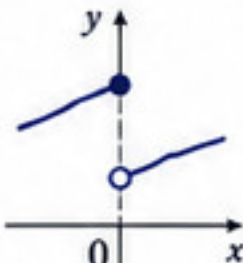
Ostry wierzchołek (załamanie)



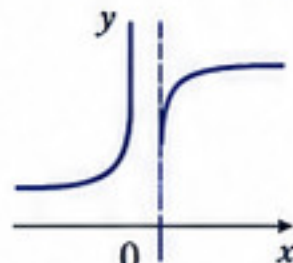
Ostro zakończony łuk („cusp”)



Nieciągłość



Styczna pionowa (w niektórych sytuacjach)



14. PRZYKŁAD: $f(x) = |x|$ w $x = 0$

Pochodna lewa:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Pochodna prawa:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

Różne pochodne jednostronne $\Rightarrow$

$$f'(0) \text{ nie istnieje.}$$



15. TWIERDZENIE (WAŻNE!)

Jeśli funkcja jest różniczkowalna w punkcie, to jest tam ciągła.

16. UWAGA — PRZYKŁAD PRZECIWNY

Funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła w $x = 0$, ale nie jest różniczkowalna w tym punkcie.

17. NAJCZĘSTSZE BŁĘDY



- Podstawienie $h = 0$ zbyt wcześnie.
- Zapominanie o podzieleniu całego licznika przez h .
- Mylenie pochodnej w punkcie z funkcją pochodną ($f'(a)$ to liczba, $f'(x)$ to funkcja).

18. MAPA W PIGUŁCE



różnica wartości



podziel przez różnicę argumentów



zmniejsz odstęp



granica = pochodna

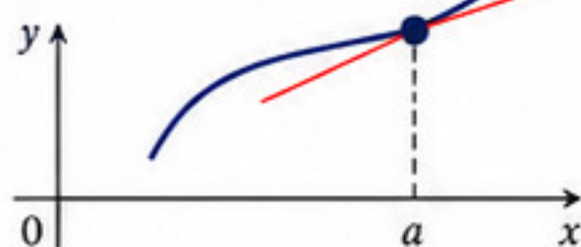


Co oznacza pochodna?

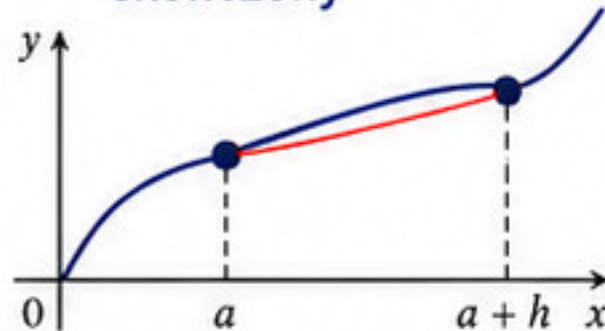
Nachylenie stycznej, szybkość zmiany i informacja o zachowaniu funkcji

1 Interpretacja geometryczna

Pochodna $f'(a)$ to nachylenie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o współrzędnej $x = a$.



2 Sieczna – przyrost skończony



Nachylenie siecznej przez punkty $(a, f(a))$ i $(a+h, f(a+h))$:

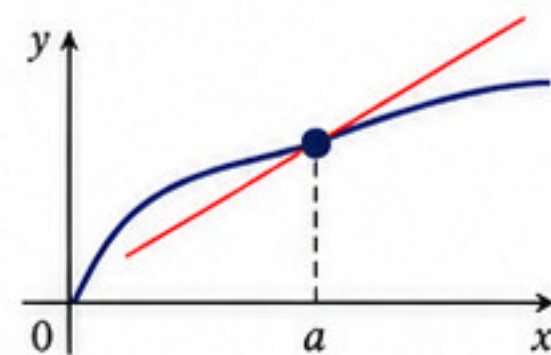
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

3 Od siecznej do stycznej

Gdy $h \rightarrow 0$, sieczna przechodzi w styczną, a jej nachylenie dąży do wartości pochodnej.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

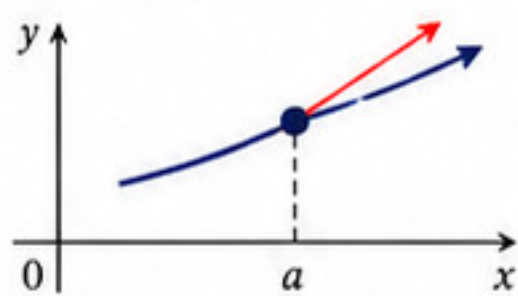
4 Styczna



Nachylenie stycznej w punkcie a wynosi $f'(a)$.

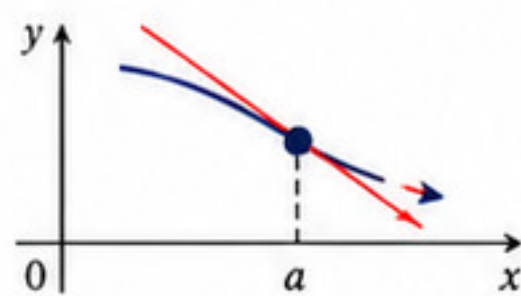
5 Dodatnia pochodna

Jeśli $f'(a) > 0$, to wykres funkcji jest lokalnie rosnący w punkcie a .



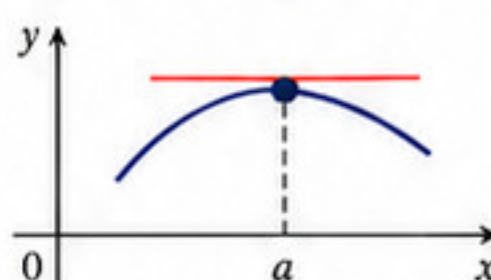
6 Ujemna pochodna

Jeśli $f'(a) < 0$, to wykres funkcji jest lokalnie malejący w punkcie a .



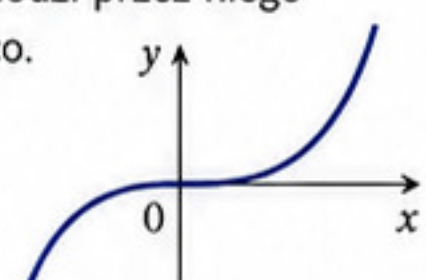
7 Zerowa pochodna

Jeśli $f'(a) = 0$, to styczna jest pozioma (nachylenie równe 0), ale **nie zawsze oznacza ekstremum**.



8 Przykład: $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$, więc $f'(0) = 0$. Mimo to punkt $x = 0$ nie jest ani maksimum, ani minimum – wykres przechodzi przez niego rosnąco.



9 Interpretacja fizyczna I

Jeśli położenie ciała w czasie t opisuje funkcja $s(t)$ (droga), to prędkość chwilowa wynosi:

$$v(t) = s'(t).$$


10 Interpretacja fizyczna II

Przyspieszenie to pochodna prędkości, czyli:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$



11 Jednostki

Jeśli s mierzymy w metrach [m], a t w sekundach [s], to $s'(t)$ ma jednostkę $\frac{m}{s}$ (metry na sekundę).

12 Średnie tempo zmiany

Średnie tempo zmiany funkcji f na przedziale $[x_1, x_2]$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

13 Tempo zmiany chwilowe

Pochodna to granica średniego tempa zmiany, gdy przedział kurczy się do zera:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

14 Przykład: $s(t) = t^2$

$$s(t) = t^2$$

$$v(t) = s'(t) = 2t$$

$$v(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

Jednostka: m/s.

15 Zastosowanie: koszt

Jeśli $C(q)$ oznacza koszt całkowity przy produkcji q jednostek, to $C'(q)$ reprezentuje przybliżony koszt krańcowy – dodatkowy koszt wytworzenia jednej dodatkowej jednostki.



16 Co mówi znak pochodnej?

rosnąca $f' > 0$ stacjonarna $f' = 0$ malejąca $f' < 0$



17 Najczęstsze błędy

- ✗ Mylenie wartości funkcji z nachyleniem stycznej.
- ✗ Zakładanie, że $f'(a) = 0$ zawsze oznacza ekstremum.
- ✗ Ignorowanie jednostek w interpretacji fizycznej.

18 Podsumowanie w pigułce



nachylenie
(stycznej)



tempo
zmiany



informacja
o kierunku
funkcji



pochodna



Tablica pochodnych

Wzory, które warto rozpoznawać bez ponownego wyprowadzania

funkcja	pochodna	warunek / uwaga
① $(c)'$	0	c – stała
② $(x)'$	1	—
③ $(x^n)'$	$n x^{n-1}$	$n \in \mathbb{R}$
④ $\left(\frac{1}{x}\right)'$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
⑤ $(\sqrt{x})'$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
⑥ $(e^x)'$	e^x	funkcja pozostaje taka sama!
⑦ $(a^x)'$	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$
⑧ $(\ln x)'$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
⑨ $(\log_a x)'$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
⑩ $(\sin x)'$	$\cos x$	—
⑪ $(\cos x)'$	$-\sin x$	—
⑫ $(\tan x)'$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
⑬ $(\cot x)'$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
⑭ $(\arcsin x)'$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
⑮ $(\arccos x)'$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
⑯ $(\arctan x)'$	$\frac{1}{1+x^2}$	—

⑰ PRZYKŁADY



$$(x^5)' = 5x^4$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

⑱ SZYBKĄ WSKAZÓWKĄ



Najpierw rozpoznaj funkcję bazową. Dopiero potem zastosuj regułę sumy, iloczynu, ilorazu lub łańcuchową.



Reguły różniczkowania

Jak liczyć pochodne funkcji zbudowanych z kilku prostszych części

1. STAŁY CZYNNIK

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

c – stała

2. SUMA

$$(f + g)' = f' + g'$$

suma pochodnych

3. RÓŻNICA

$$(f - g)' = f' - g'$$

różnica pochodnych

4. ILOCZYN (KLUCZOWA)

$$(fg)' = f'g + fg'$$

najważniejsza reguła!

✗ UWAŻAJ!

$$(fg)' \neq f'g'$$

to błąd!

6. ILORAZ

($g \neq 0$)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$



ZAPAMIĘTAJ!

pochodna góry · dół
– góra · pochodna dołu,
wszystko przez dół²

8. PRZYKŁAD – SUMA

$$f(x) = x^3 + 2x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

9. PRZYKŁAD – CZYNNIK

$$f(x) = 5x^4$$

$$f'(x) = 20x^3$$

10. PRZYKŁAD – ILOCZYN

$$f(x) = x^2 e^x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^x + x^2 e^x \\ &= e^x(2x + x^2) \end{aligned}$$

11. PRZYKŁAD – ILORAZ

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

★ 12. UPROŚĆ, GDY WARTO

Czasem dobrze jest uprościć przed różniczkowaniem.

$$\frac{x^2}{x} = x \quad (x \neq 0)$$

Wtedy: $(x)' = 1$, a nie reguła ilorazu.

★ 13. NIE ROZWIJAJ, GDY NIE TRZEBA

W iloczynach z wieloma czynnikami często czyściej jest nie rozwijać nawiasów i użyć reguły iloczynu.

Np. $(x+1)^2(x^2+1)'$ lepiej potraktować jako iloczyn dwóch części.

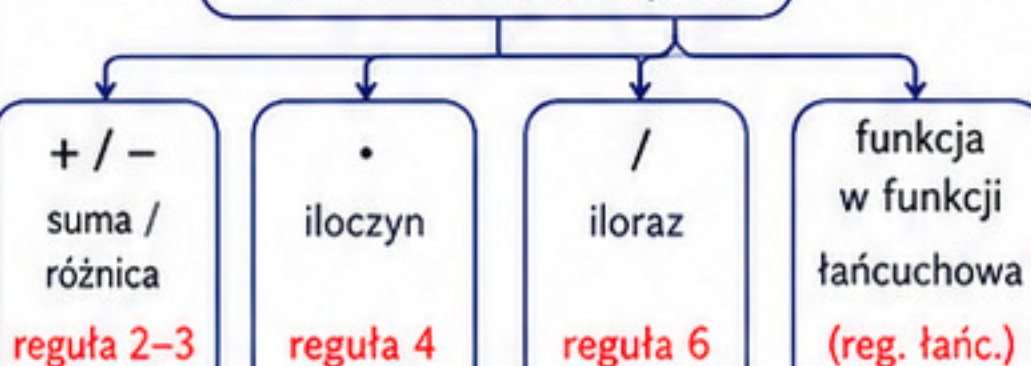
★ 14. NAJPIERW STRUKTURA

Zidentyfikuj „zewnątrzną” strukturę wyrażenia:

- suma
- iloczyn
- iloraz
- złożenie (funkcja w funkcji)

15. DRZEWO DECYZJI

Co widzisz na zewnątrz?



✗ 16. NAJCZĘSTSZE BŁĘDY

- Zapominanie jednego składnika w regule iloczynu.
- Zamiana kolejności w liczniku reguły ilorazu.
- Zapominanie o kwadracie w mianowniku w regule ilorazu.



17. SZYBKI TEST WYNIKU

- Czy znak ma sens?
- Czy dziedzina się zgadza?
- Czy można wyłączyć wspólny czynnik?



18. MAPA NA KONIEC



rozpoznaj strukturę



wybierz regułę



policz pochodne części



złóż wynik



uprość



Reguła łańcuchowa

Pochodna funkcji złożonej: różniczkuj od zewnątrz do wewnątrz

1 DEFINICJA

Funkcja złożona (kompozycja):

$$y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

Najpierw działamy g ,
potem f .

2 KLUCZOWA FORMUŁA

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

3 INTUICJA



Pochodna warstwy
zewewnętrznej $\times$
pochodna warstwy
wewnętrznej.

4 SCHEMAT WARSTW

Przykład: $y = \sin(3x^2 + 1)$

zewewnętrzna: $\sin(\dots)$

$$u = 3x^2 + 1$$

wewnętrzna: $u = 3x^2 + 1$

5 PRZYKŁAD 1

$$y = (2x + 1)^5$$

zewewnętrzna: u^5

wewnętrzna: $u = 2x + 1$

$$f'(u) = 5u^4, \quad g'(x) = 2$$

$$y' = 5(2x + 1)^4 \cdot 2$$

$$= 10(2x + 1)^4$$

6 PRZYKŁAD 2

$$y = \sin(x^2)$$

zewewnętrzna: $\sin u$

wewnętrzna: $u = x^2$

$$f'(u) = \cos u, \quad g'(x) = 2x$$

$$y' = \cos(x^2) \cdot 2x$$

$$= 2x \cos(x^2)$$

7 PRZYKŁAD 3

$$y = e^{3x}$$

zewewnętrzna: e^u

wewnętrzna: $u = 3x$

$$f'(u) = e^u, \quad g'(x) = 3$$

$$y' = e^{3x} \cdot 3$$

$$= 3e^{3x}$$

8 PRZYKŁAD 4

$$y = \ln(2x + 5)$$

zewewnętrzna: $\ln u$

wewnętrzna: $u = 2x + 5$

$$f'(u) = \frac{1}{u}, \quad g'(x) = 2$$

$$y' = \frac{1}{2x + 5} \cdot 2$$

$$= \frac{2}{2x + 5}$$

9 PRZYKŁAD 5 (PIERWIĄSTEK)

$$y = \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

zewewnętrzna: $u^{\frac{1}{2}}$

wewnętrzna: $u = x^2 + 1$

$$f'(u) = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}, \quad g'(x) = 2x$$

$$y' = \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

10 PRZYKŁAD 6 (WIELE WARSTW)

$$y = \sin((x^2 + 1)^3)$$

Warstwy (od zewnątrz do wewnątrz):

$$\textcircled{1} \sin u$$

$$\textcircled{2} u = v^3$$

$$\textcircled{3} v = x^2 + 1$$

11 POCHODNA PRZYKŁADU 6

$$y = \sin((x^2 + 1)^3)$$

$$y' = \cos((x^2 + 1)^3)$$

$$\cdot 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x$$

$$= 6x(x^2 + 1)^2 \cos((x^2 + 1)^3)$$

12 WSKAZÓWKA



Dla długich wyrażeń
w środku używaj
podstawienia:

$$u = g(x)$$

Ułatwia to zapis
i porządek w obliczeniach.

13 KOMBINACJA – ILACZYN

$$y = x^2 \sin(3x)$$

Potrzebna jest reguła iloczynu
ORAZ reguła łańcuchowa.

$$(u = x^2, \quad v = \sin(3x), \quad v' = \cos(3x) \cdot 3)$$

$$y' = 2x \sin(3x) + x^2 \cdot \cos(3x) \cdot 3$$

$$= 2x \sin(3x) + 3x^2 \cos(3x)$$

14 KOMBINACJA – ILORAZ

$$y = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$$

Potrzebna jest reguła ilorazu
ORAZ pochodne części.

$$u = \ln x \quad (u' = \frac{1}{x}), \quad v = x^2 + 1 \quad (v' = 2x)$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}(x^2 + 1) - (\ln x)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

15 ROZPOZNAWANIE



Czy jedna funkcja siedzi
„w środku” drugiej?

Jeśli tak – pomyśl
o regule łańcuchowej.

16 TYPOWY BŁĄD 1



Zapomnienie o pochodnej
warstwy wewnętrznej.

$$(\sin(x^2))' = \cos(x^2)$$

$$\text{Poprawnie: } 2x \cos(x^2)$$

17 TYPOWY BŁĄD 2



Różniczkowanie tylko części
wewnętrznej lub tylko
zewewnętrznej.

NIE wolno różniczkować
tylko jednego poziomu!

18 PAMIĘTAJ – WIZUALNY PRZEPŁYW

zewewnętrzna

jej pochodna

zostaw
wnętrze

pomnóż przez
pochodną wnętrza



Przykład: $y = \cos(5x^3)$

$$\cos(5x^3) \xrightarrow{\text{pochodna}} -\sin(5x^3) \cdot \overset{\text{zostaw}}{(5x^3)} \cdot \frac{\cdot (15x^2)}{\cdot (15x^2)} = -15x^2 \sin(5x^3)$$



Pochodne funkcji specjalnych

Wykładnicze • logarytmiczne • trygonometryczne

1 POCHODNA e^x

$$(e^x)' = e^x$$

e^x jest swoją własną pochodną.

2 POCHODNA a^x

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

dla $a > 0, a \neq 1$

3 FUNKCJA ZŁOŻONA

$$y = e^{g(x)}$$



$$y' = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

4 PRZYKŁAD

$$y = e^{3x^2}$$

$$y' = e^{3x^2} \cdot (3x^2)' \\ = e^{3x^2} \cdot 6x$$

5 POCHODNA $\ln x$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

dla $x > 0$

6 FUNKCJA ZŁOŻONA

$$y = \ln(g(x))$$



$$y' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

dla $g(x) > 0$

7 PRZYKŁAD

$$y = \ln(x^2 + 1)$$

$$y' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} \\ = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

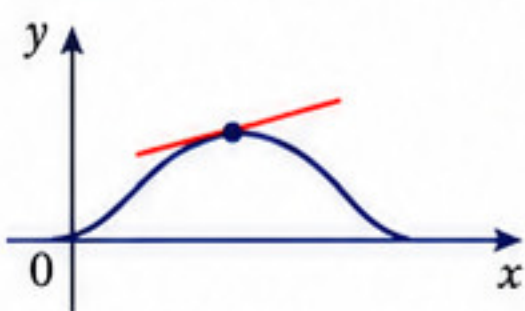
8 POCHODNA $\log_a x$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

dla $a > 0, a \neq 1, x > 0$

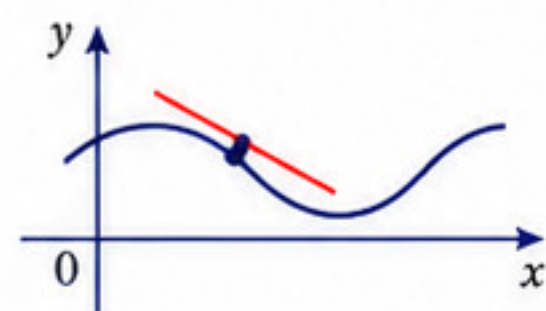
9 POCHODNA $\sin x$

$$(\sin x)' = \cos x$$



10 POCHODNA $\cos x$

$$(\cos x)' = -\sin x$$



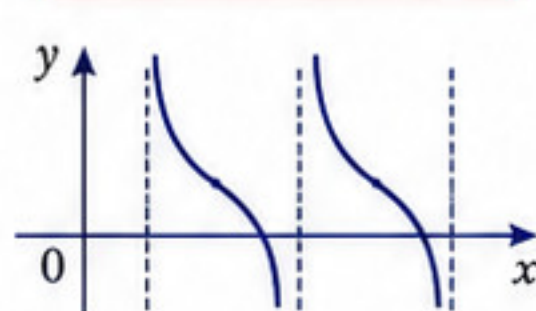
11 POCHODNA $\tan x$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \\ = \sec^2 x$$



12 POCHODNA $\cot x$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$



13 PRZYKŁAD TRYGO

$$y = \sin(5x)$$

$$y' = (\sin(5x))' \\ = 5 \cos(5x)$$

14 PRZYKŁAD TRYGO

$$y = \cos(x^2)$$

$$y' = (\cos(x^2))' \\ = -\sin(x^2) \cdot (x^2)' \\ = -2x \sin(x^2)$$

15 PRZYKŁAD MIESZANY

$$y = e^x \sin x$$

Zastosuj regułę iloczynu:

$$y' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' \\ = e^x \sin x + e^x \cos x \\ = e^x (\sin x + \cos x)$$

16 PRZYKŁAD

$$y = x \ln x$$

$$y' = (x)' \ln x + x (\ln x)' \\ = \ln x + 1$$

17 TYPOWE BŁĘDY



✗ Zapominanie $\ln a$ w pochodnej a^x

BŁĄD: $(a^x)' = a^x$

POPRAWNIE:
 $(a^x)' = a^x \ln a$

✗ Zapominanie pochodnej wnętrza w $\ln(g(x))$

BŁĄD: $(\ln(g(x)))' = \frac{1}{g(x)}$

POPRAWNIE:
 $(\ln(g(x)))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$

✗ Zapominanie znaku minus przy $\cos x$

BŁĄD: $(\cos x)' = \sin x$

POPRAWNIE:
 $(\cos x)' = -\sin x$

18 SZYBKA MAPA – JAK LICZYĆ?

rozpozna
funkcję bazową

sprawdź,
czy jest złożona

zastosuj
wzór

pomnóż przez
pochodną wnętrza



jeśli funkcja jest złożona



Styczna i normalna

Jak znaleźć równanie prostych związanych z wykresem funkcji w danym punkcie

1 DEFINICJA STYCZNEJ

Styczna do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $x = a$ to prosta o nachyleniu $m = f'(a)$, która przechodzi przez punkt $(a, f(a))$.

2 WZÓR NA STYCZNĄ

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Punkt styczności: $(a, f(a))$

3 CO LICZYMY?

- 1 Oblicz $f(a)$
- 2 Wyznacz $f'(x)$
- 3 Oblicz $f'(a)$
- 4 Podstaw do wzoru na styczną.

4 GŁÓWNY PRZYKŁAD

$$f(x) = x^2, \quad a = 1$$

- 1 $f(1) = 1$
- 2 $f'(x) = 2x$
- 3 $f'(1) = 2$

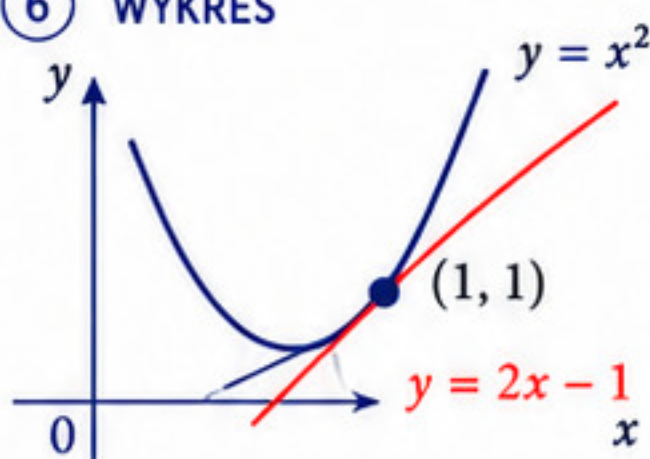
5 RÓWNANIE STYCZNEJ

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

Stąd

$$y = 2x - 1$$

6 WYKRES



7 DEFINICJA NORMALNEJ



Normalna do wykresu funkcji w punkcie $x = a$ to prosta prostopadła do stycznej w punkcie $(a, f(a))$.

8 NACHYLENIE NORMALNEJ

Jeśli $f'(a) \neq 0$, to nachylenie normalnej wynosi

$$m_n = -\frac{1}{f'(a)}$$

9 WZÓR NA NORMALNĄ

Równanie normalnej ma postać

$$y - f(a) = m_n(x - a)$$

10 NORMALNA W PRZYKŁADZIE

$$m_n = -\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{2}$$

Równanie normalnej:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

11 PRZYPADKI SZCZEGÓLNE I

Jeśli $f'(a) = 0$, to:

- styczna jest pozioma: $y = f(a)$
- normalna jest pionowa: $x = a$

12 PRZYPADKI SZCZEGÓLNE II

Jeśli $f'(a)$ nie istnieje i występuje styczna pionowa, to styczna ma równanie $x = a$, a normalna jest pozioma: $y = f(a)$.

13 INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA



Styczna w punkcie $(a, f(a))$ najlepiej przybliży wykres w małym otoczeniu tego punktu – opisuje lokalne zachowanie funkcji.

14 APROKSYMACJA LINIOWA

Dla x bliskich a mamy (w przybliżeniu):

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

15 WYZNACZANIE $\sqrt{4,1}$ METODĄ LINIOWEJ APROKSYMACJI

Rozważamy $f(x) = \sqrt{x}$ w punkcie $a = 4$.

- 1 $f(4) = \sqrt{4} = 2$
- 2 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(4) = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$
- 3 Dla $x = 4,1$ mamy $x - a = 0,1$, więc $f(4,1) \approx f(4) + f'(4)(0,1) = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,1 = 2 + 0,025 = 2,025$

16 TYPOWE BŁĘDY



- Podstawianie $f'(x)$ zamiast $f'(a)$ wzoru na styczną.
- Pomijanie punktu styczności $(a, f(a))$.
- Mylenie nachylenia normalnej z $-f'(a)$ zamiast $-\frac{1}{f'(a)}$.

17 MAPA W PIGUŁCE – SZYBKA ŚCIEŻKA

punkt

wartość funkcji

pochodna

pochodna w punkcie

nachylenie stycznej

równanie stycznej

normalna

$$x = a$$



$$f(a)$$



$$f'(x)$$



$$f'(a)$$



$$m = f'(a)$$



$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$



$$y - f(a) = m_n(x - a)$$



Monotoniczność i ekstrema

Jak znak pochodnej mówi, gdzie funkcja rośnie, maleje i osiąga ekstremum

1 FUNKCJA ROŚNIE

Jeśli na przedziale I

$$f'(x) > 0 \text{ dla każdego } x \in I$$

to funkcja f jest rosnąca na przedziale I .



2 FUNKCJA MALEJE

Jeśli na przedziale I

$$f'(x) < 0 \text{ dla każdego } x \in I$$

to funkcja f jest malejąca na przedziale I .



3 PUNKTY KRYTYCZNE

Punkt x_0 z dziedziny funkcji f nazywamy punktem krytycznym, jeśli:

$$f'(x_0) = 0 \text{ lub } f'(x_0) \text{ nie istnieje.}$$

4 UWAGA WAŻNA

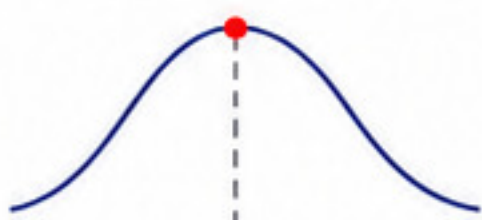


Punkt krytyczny nie musi być ekstremum!

Może to być np. punkt przegięcia lub punkt stacjonarny bez zmiany kierunku funkcji.

5 MAKSYMUM LOKALNE

Zmiana znaku: $+$ $\rightarrow$ $-$



Funkcja osiąga maksimum lokalne w punkcie x_0 .

6 MINIMUM LOKALNE

Zmiana znaku: $-$ $\rightarrow$ $+$



Funkcja osiąga minimum lokalne w punkcie x_0 .

7 BRAK EKSTREMUM

Brak zmiany znaku:

$+$ $\rightarrow$ $+$ lub $-$ $\rightarrow$ $-$



W punkcie x_0 funkcja nie ma ekstremum.

8 PROCEDURA (KROK PO KROKU)

- 1 Oblicz $f'(x)$.
- 2 Rozwiąż równanie $f'(x) = 0$.
- 3 Znajdź punkty, gdzie $f'(x)$ nie istnieje.
- 4 Podziel oś liczbową na przedziały.
- 5 Zbadaj znak $f'(x)$ na każdym przedziale (wybierz punkt testowy).
- 6 Sformułuj wnioski o monotoniczności i ekstremach.

9 PRZYKŁAD: $f(x) = x^3 - 3x$

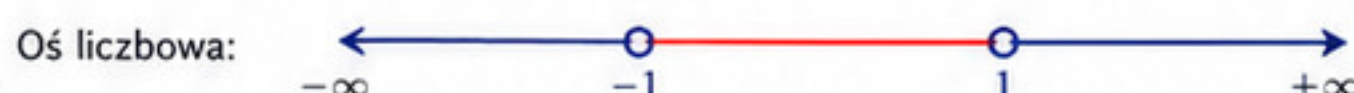
$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

$$\text{Równanie } f'(x) = 0: 3(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$\text{Punkty krytyczne: } x = -1, x = 1$$

10 TABELA ZNAKÓW $f'(x)$

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$



11 WNIOSKI – MONOTONICZNOŚĆ

- f jest rosnąca na $(-\infty, -1)$ oraz na $(1, +\infty)$.
- f jest malejąca na $(-1, 1)$.

12 EKSTREMA

- W punkcie $x = -1$ zmiana znaku $+$ $\rightarrow$ $-$, więc f ma maksimum lokalne.
- W punkcie $x = 1$ zmiana znaku $-$ $\rightarrow$ $+$, więc f ma minimum lokalne.

13 WARTOŚCI W EKSTREMACH

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$$

$$\text{Maksimum lokalne: } f(-1) = 2$$

$$f(1) = 1^3 - 3(1) = 1 - 3 = -2$$

$$\text{Minimum lokalne: } f(1) = -2$$

14 LOKALNE A GLOBALNE EKSTREMA

- Ekstrema lokalne:** dotyczą najbliższego otoczenia punktu (lokalnie największe/najmniejsze).
- Ekstrema globalne:** największa/najmniejsza wartość funkcji na całej dziedzinie lub na danym przedziale.

15 NA PRZEDZIALE ZAMKNIĘTYM $[a, b]$

Ekstrema globalne mogą wystąpić również w punktach brzegowych a lub b .

16 SCHEMAT DLA PRZEDZIAŁU $[a, b]$

- 1 Znajdź punkty krytyczne wewnątrz (a, b) .
- 2 Oblicz wartości funkcji w tych punktach.
- 3 Oblicz $f(a)$ oraz $f(b)$.
- 4 Porównaj wszystkie wartości i wskaż maksimum i minimum globalne.

17 BŁĄD! – ZBYT SZYBKIE WNIOSKI



Rozwiązanie $f'(x) = 0$ i zakończenie pracy to za mało!

Trzeba zbadać znak $f'(x)$ po obu stronach punktu (lub zastosować inny kryterium).

18 BŁĄD! – POMYŁKA Z DZIEDZINĄ



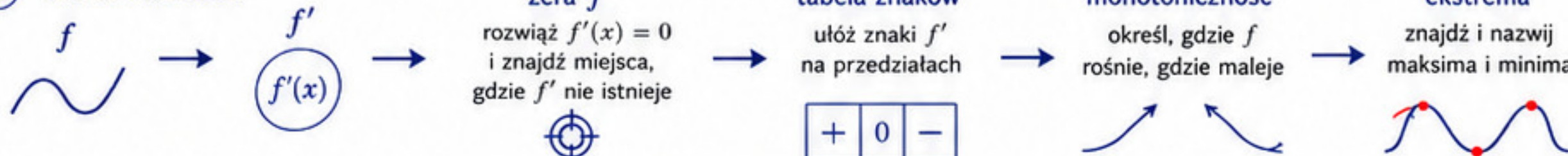
Punkt spoza dziedziny nie jest punktem krytycznym!

Analizuj tylko punkty należące do dziedziny funkcji.

19 SZYBKA TABELA – ZNAK f' I ZACHOWANIE

Zmiana znaku f'	Zachowanie funkcji f
$f' > 0$	funkcja rośnie
$f' < 0$	funkcja maleje
$f': + \rightarrow -$	maksimum lokalne
$f': - \rightarrow +$	minimum lokalne

20 MAPA PROCESU





Druga pochodna i analiza wykresu

Jak odczytać kształt funkcji z f' i f''

1 DEFINICJA

Druga pochodna $f''(x)$ to pochodna z pochodnej pierwszej:

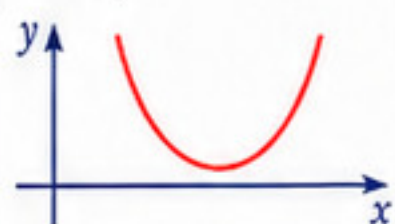
$$f''(x) = (f'(x))'$$

2 CO NAM MÓWI $f'(x)$?

Opisuje, jak zmienia się pochodna pierwsza $f'(x)$. Pozwala określić krzywiznę wykresu funkcji $f(x)$.

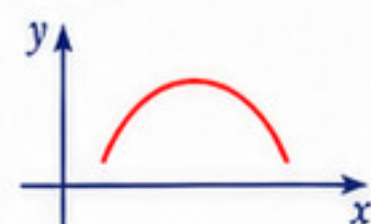
3 $f''(x) > 0$

Wykres jest lokalnie wygięty ku górze (wypukły w sensie kursu).



4 $f''(x) < 0$

Wykres jest lokalnie wygięty ku dołowi (wklęsły w sensie kursu).



5 $f''(x) = 0$ lub brak $f''(x)$

Punkt kandyduje do bycia punktem przegięcia — jeśli zmienia się krzywizna wykresu.



WAŻNE!

Samo $f''(a) = 0$ nie gwarantuje punktu przegięcia!

7 TEST II POCHODNEJ - MINIMUM LOKALNE

Jeśli w punkcie a :

$$f'(a) = 0 \text{ oraz } f''(a) > 0$$

to funkcja ma w a minimum lokalne.

8 TEST II POCHODNEJ - MAKSYMUM LOKALNE

Jeśli w punkcie a :

$$f'(a) = 0 \text{ oraz } f''(a) < 0$$

to funkcja ma w a maksimum lokalne.

9 TEST NIE ROZSTRZYGA

Jeśli w punkcie a :

$$f'(a) = 0 \text{ oraz } f''(a) = 0$$

test drugiej pochodnej nie pozwala rozstrzygnąć.

10 PRZYKŁAD

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

W punkcie $x = 0$ mamy: $f''(0) = 0$

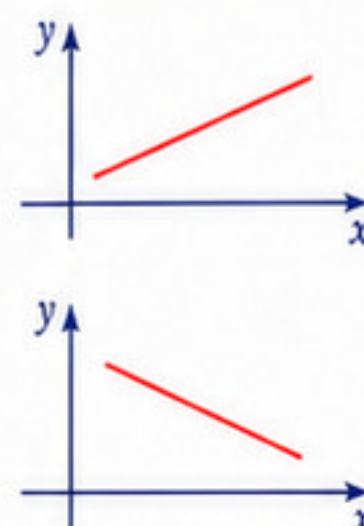
Ale znak f'' zmienia się:

$$\text{dla } x < 0: f''(x) = 6x < 0 \quad \text{dla } x > 0: f''(x) = 6x > 0$$

⇒ krzywizna zmienia się z wklęsłej na wypukłą, zatem $x = 0$ jest punktem przegięcia.

11 ZWIĄZEK f' I f''

- Jeśli $f''(x) > 0$, to $f'(x)$ rośnie. Funkcja $f'(x)$ ma dodatnie nachylenie.
- Jeśli $f''(x) < 0$, to $f'(x)$ maleje. Funkcja $f'(x)$ ma ujemne nachylenie.



12 PEŁNA ANALIZA FUNKCJI - KOLEJNOŚĆ KROKÓW

- 1 Dziedzina $D(f)$
- 2 Miejsca zerowe ($f(x) = 0$)
- 3 Symetria (parzystość / nieparzystość)
- 4 Granice funkcji ($x \rightarrow \pm \infty$, oraz w punktach osobliwych)
- 5 Asymptoty (pionowe, poziome, ukośne)
- 6 Pierwsza pochodna $f'(x)$
- 7 Monotoniczność (na podstawie znaku $f'(x)$)
- 8 Ekstrema (na podstawie $f'(x)$ i testu II pochodnej)
- 9 Druga pochodna $f''(x)$
- 10 Wypukłość / wklęsłość oraz punkty przegięcia
- 11 Szkic wykresu

☆ NAJWAŻNIEJSZE

Każda analiza zaczyna się od $D(f)$.

14 MIEJSCA ZEROWE

Gdy to możliwe, rozwiązuj równanie $f(x) = 0$.

15 GRANICE I ASYMPTOTY

Korzystaj z wiedzy z Modułu 02.

16 PIERWSZA POCHODNA

Służy do wyznaczenia monotoniczności i ekstremów.

17 DRUGA POCHODNA

Pozwala określić krzywiznę wykresu i znaleźć punkty przegięcia.

18 BUDOWA SZKICU

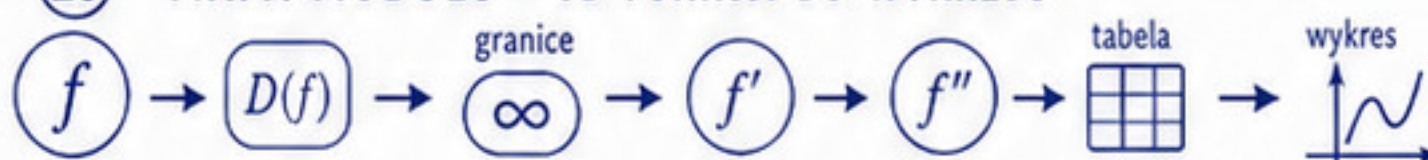
Połącz wszystkie informacje w spójną całość na osiach — nie zgaduj kształtu!



TYPOWE BŁĘDY

- ✗ Rysowanie wykresu przed analizą dziedziny.
- ✗ Mylenie miejsc zerowych f z miejscami zerowymi f' .
- ✗ Uznawanie każdego $f''(a) = 0$ za punkt przegięcia.

20 MAPA MODUŁU - OD FUNKCJI DO WYKRESU



Nie uczysz się osobnych technik — składasz je w jeden proces analizy funkcji.



04

Całki

Od funkcji pierwotnej do pola, sumowania i zastosowań

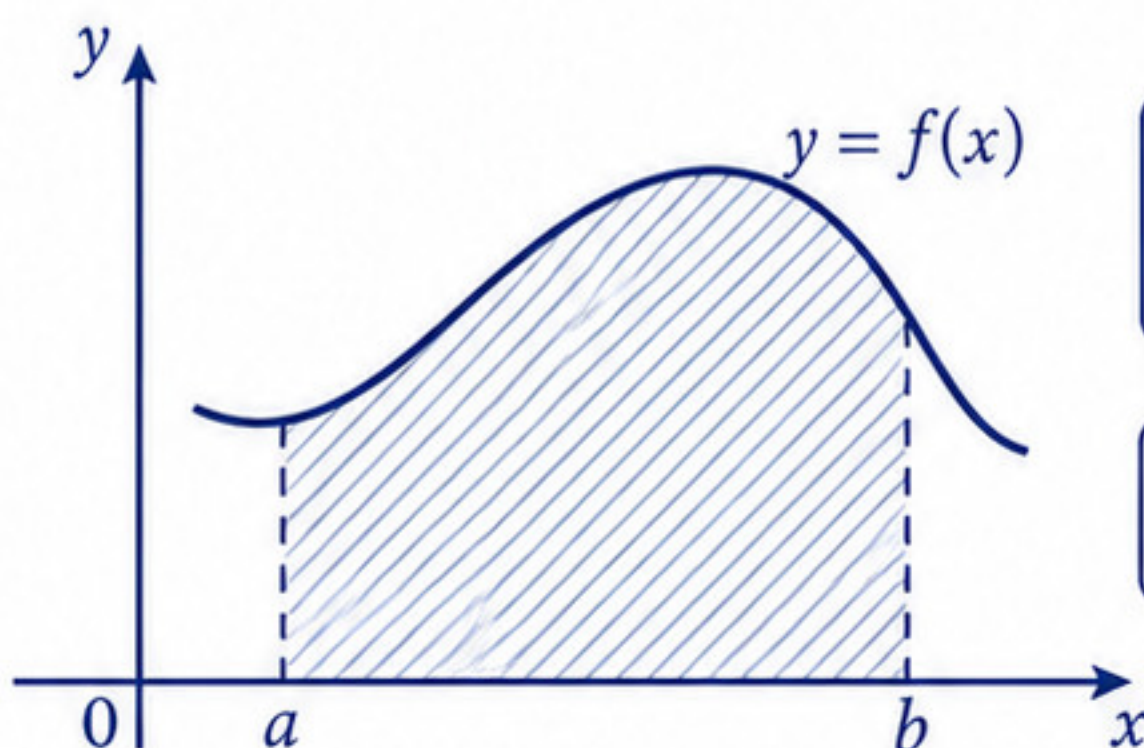


Cel modułu: zrozumieć sens całki nieoznaczonej i oznaczonej, opanować podstawowe wzory oraz najważniejsze techniki całkowania, a następnie wykorzystać całki do obliczania pól i innych prostych zastosowań.

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int f(x) dx$$

+C



$$\int_a^b$$

$$F(b) - F(a)$$

funkcja pierwotna • całka nieoznaczona • stała całkowania • tablica całek • podstawienie • całkowanie przez części • ułamki proste • całka oznaczona • Newton–Leibniz • własności całki • pole pod wykresem • zastosowania

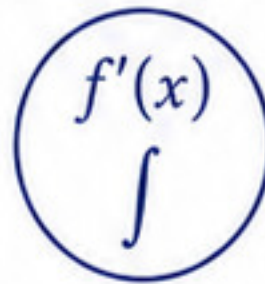
„Pochodna pyta: jak szybko coś się zmienia?”

Całka pyta: ile łącznie się zgromadziło?”

funkcja



pochodna / całka



wnioski / pole



suma





Całka nieoznaczona

Szukamy funkcji, której pochodna daje znany wzór

1 DEFINICJA

Jeśli funkcja F ma pochodną w danym przedziale i $F'(x) = f(x)$, to mówimy, że F jest **funkcją pierwotną** funkcji f w tym przedziale.

2 WZÓR KLUCZOWY

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

3 CO OZNACZA C ?

C to **stała całkowania**.

Oznacza, że istnieje nieskończenie wiele funkcji pierwotnych.

4 DLACZEGO POTRZEBNE JEST C ?

Pochodna dowolnej stałej jest równa zero, dlatego do funkcji pierwotnej możemy dodać dowolną stałą, a pochodna się nie zmieni.

$$(x^2)' = 2x \quad (x^2 + 5)' = 2x \quad (x^2 - 100)' = 2x$$

5 INTUICJA



Całkowanie „oddaje” nam całą rodzinę funkcji pierwotnych, a nie jedną konkretną funkcję.

6 CO OZNACZA dx ?

dx oznacza, że całkujemy względem zmiennej x . Wynik całkowania jest wyrażony w tej samej zmiennej x .

7 PRZYKŁAD PODSTAWOWY

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

8 SPRAWDZENIE PRZEZ POCHODNĄ

$$(x^2 + C)' = 2x$$

Zgadza się!

9 CAŁKA ZE STAŁEJ

$$\int c dx = cx + C$$

(c to stała)

10 LINEARNOŚĆ (ADDYTYWNOŚĆ)

$$\begin{aligned} \int [f(x) + g(x)] dx \\ = \int f(x) dx + \int g(x) dx \end{aligned}$$

11 STAŁY CZYNNIK PRZED CAŁKĄ

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

(c to stała)

12 PRZYKŁAD

$$\int (3x^2 + 2x - 4) dx = x^3 + x^2 - 4x + C$$

13 ESENCJA ZWIĄZKU

różniczkowanie $\longleftrightarrow$ całkowanie

Pochodna usuwa stałą, a całka ją „dodaje z powrotem”.

14 UWAGA: NIE DO KOŃCA ODWROTNOŚĆ

Całkowanie nie jest dokładnie „odwracalne” w prosty sposób, ponieważ zawsze pojawia się stała całkowania C . Warunki dodatkowe mogą być potrzebne, aby wyznaczyć konkretną funkcję.

15 WARUNEK POCZĄTKOWY

Jeśli znamy wartość funkcji w jednym punkcie, to możemy wyznaczyć stałą całkowania C .

16 PRZYKŁAD Z WARUNKIEM

$$F'(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2 + C$$

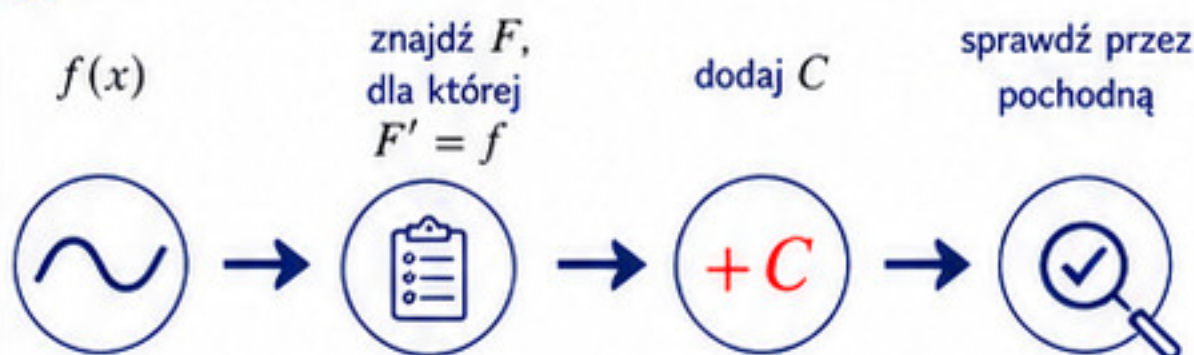
Jeśli $F(0) = 3$, to $x = 0$ wpisujemy do $F(x)$:

$$F(0) = 0^2 + C = 3 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow F(x) = x^2 + 3$$

17 TYPOWE BŁĘDY

- ❌ Zapominanie o $+C$ – wynik jest niepełny.
- ❌ Dodawanie $+C$ do każdego składnika osobno
(np. $\int x dx + \int 1 dx = \frac{x^2}{2} + 1 + C$ – dobrze jest dodać jeden $+C$ na końcu).
- ❌ Mylenie funkcji pierwotnej z pochodną
(np. zamiast całkować – różniczkujemy).

18 MAPA W 4 KROKACH





Tablica podstawowych całek

Najważniejsze funkcje pierwotne do szybkiego sprawdzania

Lp.	Całka	Wynik	Warunki / uwagi	Lp.	Całka	Wynik	Warunki / uwagi
①	$\int c \, dx$	$cx + C$	c – stała	⑩	$\int \frac{dx}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	—
②	$\int x^n \, dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \neq -1$	⑪	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$ x < 1$
③	$\int \frac{1}{x} \, dx$	$\ln x + C$	wyjątek: $n = -1$	⑫	Mini przykłady reguły potęgowej ($n \neq -1$):		
④	$\int e^x \, dx$	$e^x + C$	—		$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C$		
⑤	$\int a^x \, dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$a > 0, a \neq 1$		$\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C$		
⑥	$\int \sin x \, dx$	$-\cos x + C$	—		$\int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + C$		
⑦	$\int \cos x \, dx$	$\sin x + C$	—	⑬	Przykład (wielomiany):		
⑧	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$	$\tan x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$		$\int (4x^3 - 2x) \, dx = x^4 - x^2 + C$		
⑨	$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx$	$-\cot x + C$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$	⑭	Przykład (mieszane):		
					$\int (e^x + \cos x) \, dx = e^x + \sin x + C$		

15

JAK ZACZAĆ?



Najpierw uprość wyrażenie.
Następnie rozpoznaj wzorec i dopasuj do odpowiedniego wzoru z tabeli.

16

GDY BRAK WZORCA



Jeśli żaden bezpośredni wzorec nie pasuje, zastosuj odpowiednią technikę:

- podstawienie
- całkowanie przez części
- ułamki proste

17

TYPOWE BŁĘDY



- Stosowanie reguły potęgowej dla $n = -1$ (czyli dla $\frac{1}{x}$).
- Zapominanie o dzieleniu przez nowy wykładnik ($n + 1$).
- Błędy znaku, szczególnie w $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.

18

SZYBKA KONTROLA



Po każdej niepewnej całce zróżniczkuj wynik — to najszybsza kontrola.



PAMIĘTAJ

Całkowanie to odwracanie różniczkowania.
Ćwicz rozpoznawanie wzorców i regularnie sprawdzaj wynik przez różniczkowanie.



Całkowanie przez podstawienie

Odwrócona logika reguły łańcuchowej

1 IDEA CENTRALNA



Jeśli w całce występuje funkcja złożona wraz z pochodną jej wnętrza (lub wielokrotnością tej pochodnej), to podstawienie może uprościć całkę.

2 KLUCZOWY PODSTAWIENIE

$$u = g(x)$$

$$du = g'(x) dx$$

3 INTUICYJNA REGUŁA



$$\int f(g(x)) g'(x) dx$$

$$= \int f(u) du$$

4 ROZPOZNANIE



Czy widzę „wnętrze” i jego pochodną?

5 PRZYKŁAD 1 - WYBÓR

$$\int 2x(x^2 + 1)^5 dx$$

Wnętrze: $x^2 + 1$

Pochodna wnętrza: $2x$

Wybieram: $u = x^2 + 1$

$$du = 2x dx$$

6 PRZYKŁAD 1 - PO PODSTAWIENIU

$$\int 2x(x^2 + 1)^5 dx = \int u^5 du$$

Całkuję w u :

$$\int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C$$

7 PRZYKŁAD 1 - POWRÓT

Wracam do x :

$$\frac{(x^2 + 1)^6}{6} + C$$

8 PRZYKŁAD 2

$$\int \cos(3x) dx$$

$$u = 3x, du = 3dx, dx = \frac{du}{3}$$

$$\int \cos(3x) dx = \int \cos u \cdot \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \sin(3x) + C$$

9 PRZYKŁAD 3

$$\int e^{2x+1} dx$$

$$u = 2x + 1, du = 2dx, dx = \frac{du}{2}$$

$$\int e^{2x+1} dx = \int e^u \cdot \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x+1} + C$$

10 PRZYKŁAD LOGARYTMICZNY

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

$$u = x^2 + 1, du = 2x dx$$

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{u} du$$

$$= \ln(x^2 + 1) + C$$

Nie potrzeba wartości bezwzględnej, bo $x^2 + 1 > 0$ dla każdego x .

11 PRZYKŁAD Z $\frac{1}{3x+2}$

$$\int \frac{1}{3x+2} dx$$

$$u = 3x + 2, du = 3dx, dx = \frac{du}{3}$$

$$\int \frac{1}{3x+2} dx = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \ln|3x + 2| + C$$

12 BRAKUJĄCY STAŁY WSPÓŁCZYNNIK



Jeśli pochodna wnętrza różni się stałą k , to kompensujemy przez pomnożenie lub podzielenie.

$$\text{Przykład: } \int 5x(x^2 + 1)^5 dx$$

$$\text{Tu: } 5x = \frac{5}{2} \cdot (2x)$$

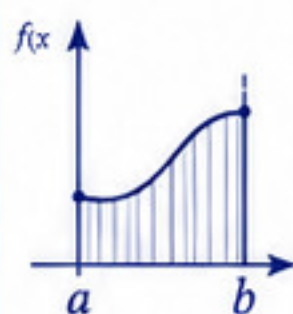
$$\text{Wynik: } \frac{5}{12} (x^2 + 1)^6 + C$$

13 GDY PO PODSTAWIENIU ZOSTAJE x



Jeśli po podstawieniu w całce nadal występuje x (poza u), to wybór u był zapewne niepełny lub nie trafiony.

14 CAŁKI OKREŚLONE



W całkach określonych po podstawieniu należy również zamienić granice na nowe (w u).

15 SCHEMAT POSTĘPOWANIA

- 1 Wybieram $u = g(x)$
- 2 Obliczam $du = g'(x) dx$
- 3 Zamieniam całą całkę $x \rightarrow u$
- 4 Całkuję w zmiennej u
- 5 Wracam do zmiennej x

16 NAJCZĘSTSZE BŁĘDY

- ✗ Podstawiam tylko część wyrażenia, nie całość.
- ✗ Zapominam o współczynniku: nie mnożę / nie dzielę przez stałą.
- ✗ Mieszam u i x w tej samej, już przekształconej całce.

Sprawdź: czy wszędzie jest u ?

17 MOST MIĘDZY REGUŁAMI



Dwie odwrotne strony tej samej idei.

18 SZYBKA MAPA W GŁOWIE

$$\begin{array}{ccccc} \text{złożenie} & & \text{pochodna} & & \text{podstawienie} \\ & & \text{wnętrza} & & \text{upraszcza całkę} \\ f(g(x)) & + & g'(x) & \rightarrow & \int f(u) du \end{array}$$

**ZŁOŻENIE + POCHODNA WNĘTRZA
→ PODSTAWIENIE**

Całkowanie przez części

Metoda dla iloczynów, których nie da się wygodnie całkować bezpośrednio

1 KLUCZOWA FORMUŁA

$$\int u dv = uv - \int v du$$

2 POCHODZENIE Z REGUŁY ILOCZYNU

Z reguły iloczynu:

$$(uv)' = u'v + uv''$$

Całkując obie strony:

$$uv = \int u'v dx + \int uv'' dx$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

(gdzie $dv = v'' dx$, $du = u' dx$)

3 KIEDY STOSOWAĆ?

Stosujemy, gdy całka z iloczynu nie daje się wygodnie policzyć bezpośrednio, np. dla:

- xe^x
- $x \sin x$
- $x \ln x$
- $\ln x$

4 JAK WYBRAĆ u ?

Wybieramy u jako funkcję, która po zróżniczkowaniu staje się prostsza.

Chcemy, aby po kilku krokach otrzymać całkę łatwą lub stałą.

5 WSKAZÓWKA HEURYSTYCZNA (NIE JEST TO SZTYWNA REGUŁA)

Gdy mamy do wyboru kilka możliwości, przy wyborze u kieruj się następującą kolejnością preferencji:

logarytmiczna $\rightarrow$ algebraiczna $\rightarrow$ trygonometryczna $\rightarrow$ wykładnicza

czyli: log $\rightarrow$ alg $\rightarrow$ tryg $\rightarrow$ wykł.

14 JAK WYBRAĆ dv ?

Wybieramy dv tak, aby jego całka była łatwa do obliczenia.

Czyli v powinno być funkcją elementarną.

6 PRZYKŁAD 1 - WYBÓR

Obliczmy $\int x e^x dx$.

Wybieramy:

$$u = x$$

$$dv = e^x dx$$

Wtedy:

$$du = dx \quad v = e^x$$

7 PRZEPISANIE WZORU

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

8 WYNIK PODSTAWOWY

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x + C$$

9 WYNIK W POSTACI ZFAKTORYZOWANEJ

$$\int x e^x dx = e^x(x - 1) + C$$

15 PROCEDURA KROK PO KROKU

- 1 Wybierz u .
- 2 Oblicz $du = u' dx$.
- 3 Wybierz dv .
- 4 Oblicz v (całkując dv).
- 5 Podstaw do wzoru: $\int u dv = uv - \int v du$.
- 6 Uprość wynik.

10 PRZYKŁAD 2 - WYBÓR

Obliczmy $\int x \cos x dx$.

Wybieramy:

$$u = x$$

$$dv = \cos x dx$$

Wtedy:

$$du = dx \quad v = \sin x$$

11 ZASTOSOWANIE WZORU

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx$$

12 WYNIK

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$$

13 CAŁKA Z $\ln x$ - TRIK

Nie da się od razu zastosować wzoru, ale zapisujemy:

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx$$

Potem stosujemy metodę.

14 OBLICZENIE

Wybieramy:

$$u = \ln x$$

$$dv = dx$$

Wtedy:

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = x$$

15 WYNIK

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int 1 dx \\ &= x \ln x - x + C \end{aligned}$$

16 CZASEM TRZEBA WIĘCEJ RAZY

W wielu zadaniach trzeba zastosować metodę więcej niż raz, aż pozostanie całka elementarna.

Nie rezygnuj po pierwszym kroku!

17 CAŁKI CYKLICZNE

W niektórych przypadkach po dwukrotnym zastosowaniu metody otrzymujemy z powrotem całkę wyjściową (z innym współczynnikiem).

Przykład: $\int e^x \sin x dx$

$$I = \int e^x \sin x dx \xrightarrow{1. \text{ zastosowanie}} \text{wyrażenie z } I \xrightarrow{2. \text{ zastosowanie}} \text{powrót do } I$$

Wtedy rozwiązujemy równanie na I .

18 NAJCZĘSTSZE BŁĘDY

- ✗ Zapomnienie o znaku minus wzoru: $\int u dv = uv - \int v du$.
- ✗ Całkowanie u zamiast różniczkowania u .
- ✗ Wybór dv , którego całka jest trudna lub niemożliwa do policzenia wygodnie.

19 KONTROLA WYNIKU

- ✓ Jeśli to możliwe - różniczkuj wynik końcowy i sprawdź, czy otrzymujesz podcałkową funkcję.
- To dobra praktyka, która zapobiega błędom rachunkowym.

20 MAPA NA SZYBKO

iloczyn $\rightarrow$ wybierz $u, dv \rightarrow$ policz $du, v \rightarrow uv - \int v du$



$$uv - \int v du$$



Ułamki proste

Jak rozbić trudną funkcję wymierną na łatwiejsze składniki do całkowania

1 CO TO JEST?

Funkcja wymierna to iloraz dwóch wielomianów:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

gdzie $P(x), Q(x)$ – wielomiany,
 $Q(x) \neq 0$.

2 WARUNEK WSTĘPNY

Aby bezpośrednio rozłożyć na ułamki proste, zwykle wymagamy:

$$\deg P < \deg Q$$

czyli stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika.

3 GDY $\deg P \geq \deg Q$

Najpierw wykonaj dzielenie wielomianów:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

gdzie $\deg R < \deg Q$.
Dopiero ułamek właściwy rozłóż na ułamki proste.

4 FAKTORYZACJA $Q(x)$

Zawsze, gdy to możliwe, zafaktoryzuj mianownik na czynniki:

$$Q(x) = \prod_i (\text{czynnik}_i)^{k_i}$$

To określa postać rozkładu na ułamki proste.

5 RÓŻNE CZYNNIKI LINIOWE

Jeśli $Q(x) = (x-a)(x-b)$,
 $a \neq b$, to

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

gdzie A, B – stałe do wyznaczenia.

6 PRZYKŁAD GŁÓWNY

Rozłóż na ułamki proste: $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$

Podstawiamy postać:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

7 USUŃ MIANOWNIKI

Mnożymy obie strony przez $(x-1)(x+2)$:

$$1 = A(x+2) + B(x-1)$$

8 WYZNACZ A

Podstawiamy $x = 1$:

$$1 = A(1+2) + B(1-1)$$

$$1 = 3A$$

$$A = \frac{1}{3}$$

9 WYZNACZ B

Podstawiamy $x = -2$:

$$1 = A(-2+2) + B(-2-1)$$

$$1 = -3B$$

$$B = -\frac{1}{3}$$

10 WYNIK ROZKŁADU

Po podstawieniu A i B dostajemy:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)}$$

11 CAŁKOWANIE

Całkujemy składniki osobno:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + C$$

12 CZYNNIK LINIOWY POWTÓRZONY

Jeśli w mianowniku jest $(x-a)^k$,
to uwzględniamy wszystkie potęgi:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \dots + \frac{M}{(x-a)^k}$$

13 NIEREDUKOWALNY CZYNNIK KWADRATOWY

Dla czynnika kwadratowego bez pierwiastków rzeczywistych, np. $x^2 + 1$, stosujemy postać:

$$\frac{Ax+B}{x^2+1}$$

Jeśli jest podniesiony do potęgi k – uwzględniamy kolejne potęgi w mianowniku.

14 CEL ROZKŁADU

Przekształcić całkę z trudnej funkcji wymiernej w sumę całek ze składników o prostych mianownikach, które znamy i potrafimy całkować.



15 PROCEDURA – KROK PO KROKU

- 1 Sprawdź stopnie licznika i mianownika.
- 2 Zafaktoryzuj mianownik.
- 3 Zapisz ogólną postać rozkładu na ułamki proste.
- 4 Wyznacz współczynniki (np. przez podstawianie, porównywanie współczynników lub układ równań).
- 5 Całkuj składniki osobno i zsumuj wyniki.

16 NAJCZĘSTSZE BŁĘDY

- ✗ Zapominanie o składniku dla wyższej potęgi czynnika (np. brak $\frac{1}{(x-a)^2}$).
- ✗ Próba rozkładu przed wykonaniem dzielenia wielomianów, gdy $\deg P \geq \deg Q$.
- ✗ Błędy znaków przy wyznaczaniu współczynników $A, B, \dots$.

17 SPRAWDZENIE ALGEBRAICZNE

Złóż ułamki proste do wspólnego mianownika i upewnij się, że odzyskujesz pierwotną funkcję:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

18 MAPA NA SKRÓTY

wymierna $\xrightarrow{\text{stopnie}}$ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ $\xrightarrow{\text{faktoryzacja mianownika}}$ $\frac{\deg P}{\deg Q} \rightarrow (x-a)^k \dots \rightarrow \xrightarrow{\text{rozkład}}$ $\frac{A}{x-a} + \dots \rightarrow \xrightarrow{\text{współczynniki}}$ $A, B, \dots \rightarrow \xrightarrow{\text{całkowanie}}$ $\int$



CAŁKA OZNACZONA

Od sumowania małych fragmentów do dokładnej wartości między a i b

1 ZAPIS CAŁKI OZNACZONEJ

$$\int_a^b f(x) dx$$

a — dolna granica całkowania
 b — górna granica całkowania
 $f(x)$ — funkcja podcałkowa

2 CO OZNACZA CAŁKA OZNACZONA?

Opisuje łączny efekt działania funkcji na przedziale od a do b .



W geometrii jest związana z polem orientowanym między wykresem funkcji a osią OX.

3 CAŁKA NIEOZNACZONA A OZNACZONA

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

— rodzina funkcji

$$\int_a^b f(x) dx = \text{liczba}$$

— pojedyncza wartość liczbową!

4 FUNKCJA PIERWOTNA

Jeśli $F'(x) = f(x)$,
to F jest **funkcją pierwotną** funkcji f .

5 TWIERDZENIE PODSTAWOWE RACHUNKU CAŁKOWEGO

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

górna granica minus dolna granica

6 PROCEDURA

- 1 znajdź $F(x)$
- 2 oblicz $F(b)$
- 3 oblicz $F(a)$
- 4 odejmij
- 5 uprość wynik

7 PRZYKŁAD 1

$$\int_0^2 x dx$$

Funkcja pierwotna:

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

8 PODSTAWIENIE GRANIC

$$\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2$$

9 WYNIK

$$\int_0^2 x dx = 2$$

10 PRZYKŁAD 2

$$\int_1^3 2x dx$$

Funkcja pierwotna:

$$F(x) = x^2$$

$$[x^2]_1^3 = 9 - 1 = 8$$

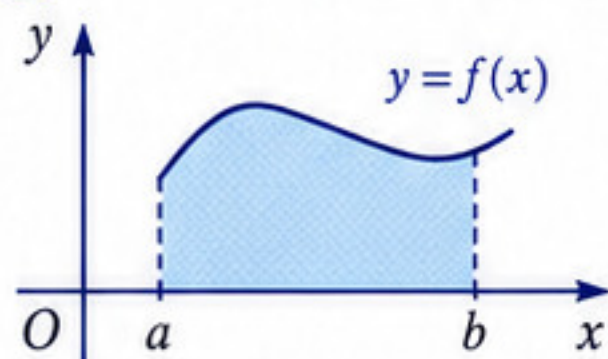
11 DLACZEGO NIE MA +C?

$$[F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$



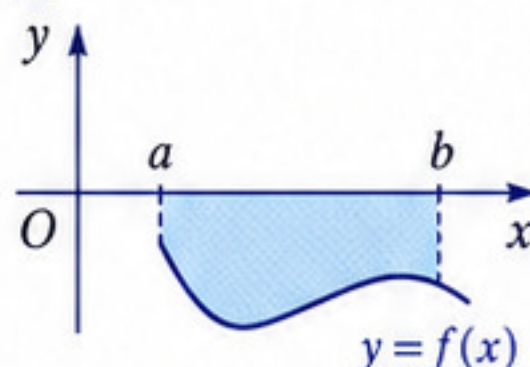
Stała C się redukuje.

12 INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA



Gdy $f(x) \geq 0$ na $[a, b]$,
całka odpowiada polu pod wykresem.

13 FUNKCJA POD OSIĄ OX



Fragment pod osią OX daje wkład ujemny do całki.

14 ZNAK WKŁADU DO CAŁKI

nad osią → dodatnio

pod osią → ujemnie

15 WAŻNE ROZRÓŻNIENIE



Całka oznaczona nie zawsze jest równa geometrycznemu polu figury.

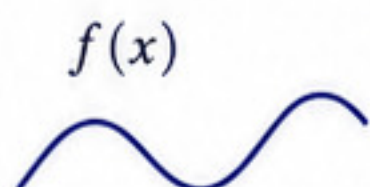
16 SZYBKA KONTROLA

- ☒ Czy znalazłem poprawną funkcję pierwotną?
- ☒ Czy zastosowałem $F(b) - F(a)$?
- ☒ Czy wynik ma właściwy znak?

17 TYPOWE BŁĘDY

- ☒ $F(a) - F(b)$
- ☒ Dodawanie $+C$ do wyniku końcowego
- ☒ Ignorowanie granic całkowania

18 SZYBKA MAPA



$$F(x)$$

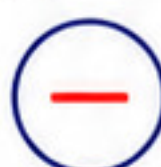


$$[F(x)]_a^b$$

$$\left[\right]_a^b$$



$$F(b) - F(a)$$



interpretacja





WŁASNOŚCI CAŁKI OZNACZONEJ

Reguły, które upraszczają obliczenia i pomagają sprawdzać wynik

1 TE SAME GRANICE

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Przedział ma długość zero.

2 ZAMIANA GRANIC

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

3 DODAWANIE PRZEDZIAŁÓW

Jeśli $a < c < b$, to

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



4 SUMA FUNKCJI

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

5 RÓŻNICA FUNKCJI

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - g(x)] dx &= \\ &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

6 STAŁA PRZED CAŁKĄ

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

7 FUNKCJA NIEUJEMNA

Jeśli $f(x) \geq 0$ na $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

8 PORÓWNYWANIE FUNKCJI

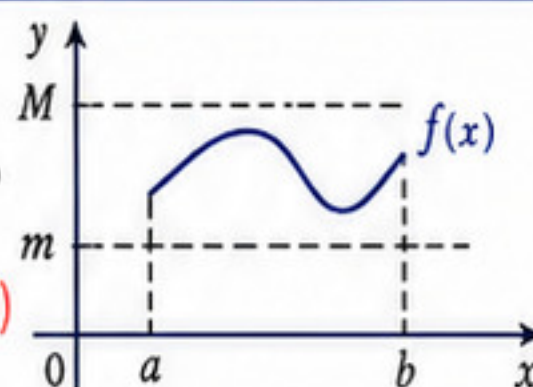
Jeśli $f(x) \leq g(x)$ na $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

9 OSZACOWANIE

Jeśli $m \leq f(x) \leq M$ na $[a, b]$, to

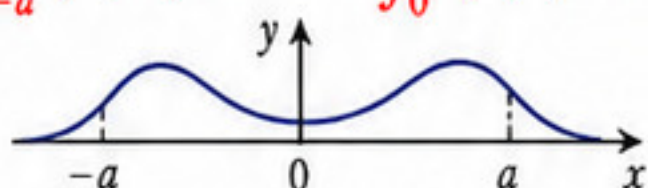
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$



10 FUNKCJA PARZYSTA

Jeśli $f(-x) = f(x)$, to

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$



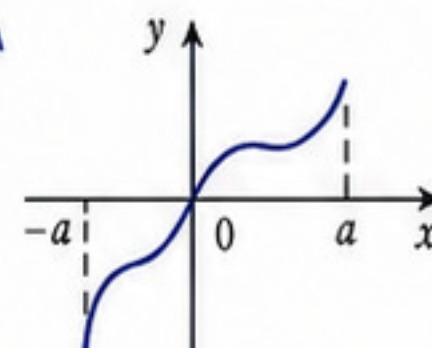
11 PRZYKŁAD FUNKCJI PARZYSTEJ

$$\int_{-2}^2 x^2 dx = 2 \int_0^2 x^2 dx$$

12 FUNKCJA NIEPARZYSTA

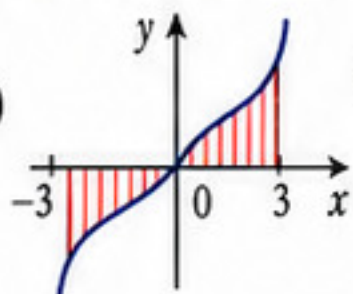
Jeśli $f(-x) = -f(x)$, to

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$



13 PRZYKŁAD FUNKCJI NIEPARZYSTEJ

$$\int_{-3}^3 x^3 dx = 0$$



Pola dodatnie i ujemne znoszą się.



WAŻNA UWAGA

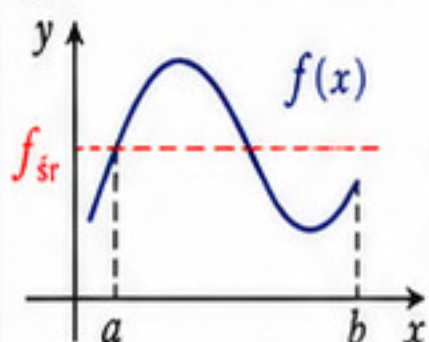
Całka równa 0 nie oznacza, że funkcja jest wszędzie równa 0.

Może występować znoszenie pól dodatnich i ujemnych.

15 WARTOŚĆ ŚREDNIA FUNKCJI

$$f_{\text{sr}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

16 INTERPRETACJA WARTOŚCI ŚREDNIEJ



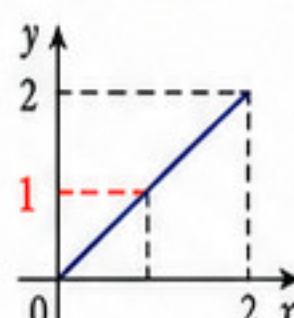
To taka stała wysokość, która na przedziale $[a, b]$ daje ten sam łączny efekt co funkcja f .

17 PRZYKŁAD WARTOŚCI ŚREDNIEJ

Dla $f(x) = x$ na $[0, 2]$:

$$\int_0^2 x dx = 2$$

$$\Rightarrow f_{\text{sr}} = \frac{2}{2} = 1$$



18 SZYBKA MAPA



zamiana granic bez zmiany znaku (zapominasz o minusie).



używanie symetrii bez sprawdzenia funkcji (czy jest parzysta/nieparzysta?).



utożsamianie całki równej 0 z funkcją równą 0.



ZASTOSOWANIA CAŁEK

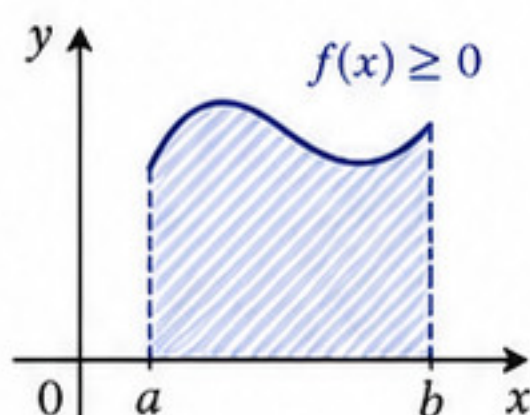
Pole pod wykresem, pole geometryczne i domknięcie Analizy Matematycznej 1

A POLE POD WYKRESEM

① Gdy $f(x) \geq 0$

$$P = \int_a^b f(x) dx$$

Jeżeli funkcja jest nieujemna na całym przedziale, całka oznaczona daje pole pod wykresem.

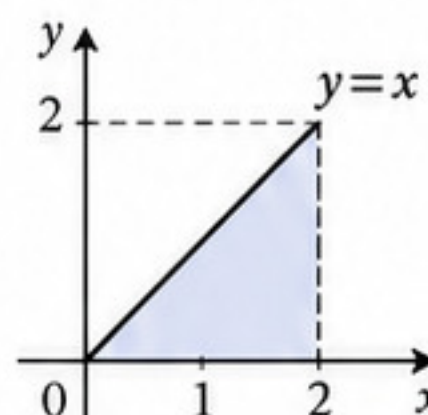


② Przykład: $f(x) = x$ na $[0, 2]$

$$P = \int_0^2 x dx = 2$$

Pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$



całka
=
geometria

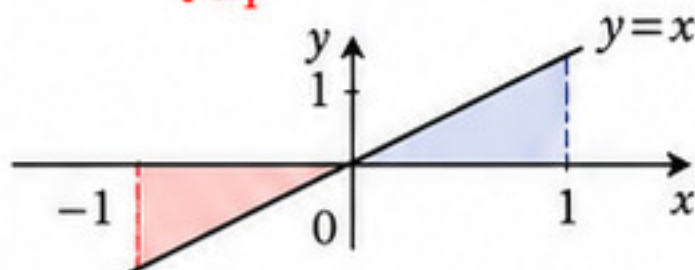
B GDY FUNKCJA ZMIENIA ZNAK

③ Pole orientowane a pole geometryczne

$\int_a^b f(x) dx$ może być ujemna lub równa zero, ale pole geometryczne jest zawsze ≥ 0 .

④ Przykład: $f(x) = x$ na $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 x dx = 0$$



Pole geometryczne całkowite = 1

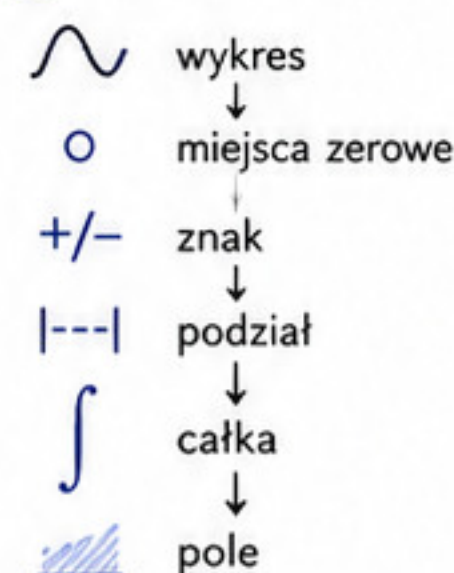
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\right)$$

⑤ Jak liczyć pole geometryczne?

- znajdź miejsca zerowe
- podziel przedział
- policz każdą część osobno
- dodaj wartości dodatnie

$$P = \int_a^b |f(x)| dx$$

⑥ Schemat



C INNE ZASTOSOWANIA CAŁKI

⑦ Droga z prędkości



Jeśli $v(t)$ to prędkość w czasie t , to przemieszczenie (między t_1 a t_2) opisuje całka:

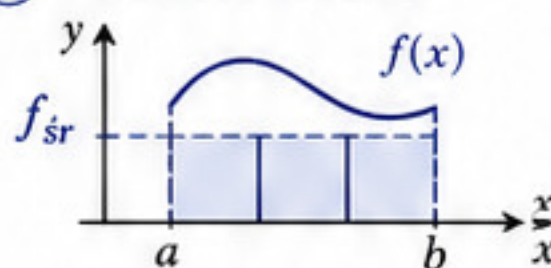
$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

⑧ Akumulacja



Całka może mierzyć ilość zgromadzonej wielkości w czasie lub przestrzeni (np. ładunek, masa, liczba osób).

⑨ Wartość średnia



Średnia wartość funkcji na $[a, b]$:

$$f_{sr} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

⑩ Suma bardzo małych części



Całka opisuje efekt powstający z sumowania bardzo wielu bardzo małych fragmentów.

SZYBKA POWTÓRKA ANALIZY MATEMATYCZNEJ 1

⑪ FUNDAMENTY

- $D(f)$
- algebra
- wykresy
- logarytmy
- trygonometria

Czy wzór ma sens?

⑫ GRANICE

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Do czego zbliża się funkcja?

⑬ CIĄGŁOŚĆ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Czy zachowanie funkcji zgadza się z jej wartością?

⑭ POCHODNE

$$f'(x)$$

Jak szybko funkcja się zmienia?

⑮ CAŁKI

$$\int f(x) dx$$

Jaki jest łączny efekt tej zmiany?

ROZPOZNAJ PROBLEM → WYBIERZ WŁAŚCIWY SCHEMAT → WYKONAJ OBLICZENIA → SPRAWDŹ WYNIK

- 1 Czy sprawdziłem dziedzinę?
- 2 Czy rozpoznałem właściwy typ zadania?
- 3 Czy wybrałem poprawną metodę?
- 4 Czy znak i wynik mają sens?
- 5 Czy mogę sprawdzić wynik inną metodą lub przez pochodną?

Nie musisz pamiętać wszystkiego naraz.

Najważniejsze jest rozpoznawanie struktury problemu i dobieranie właściwego narzędzia.

Definicja → wzór → warunki → przykład → kontrola