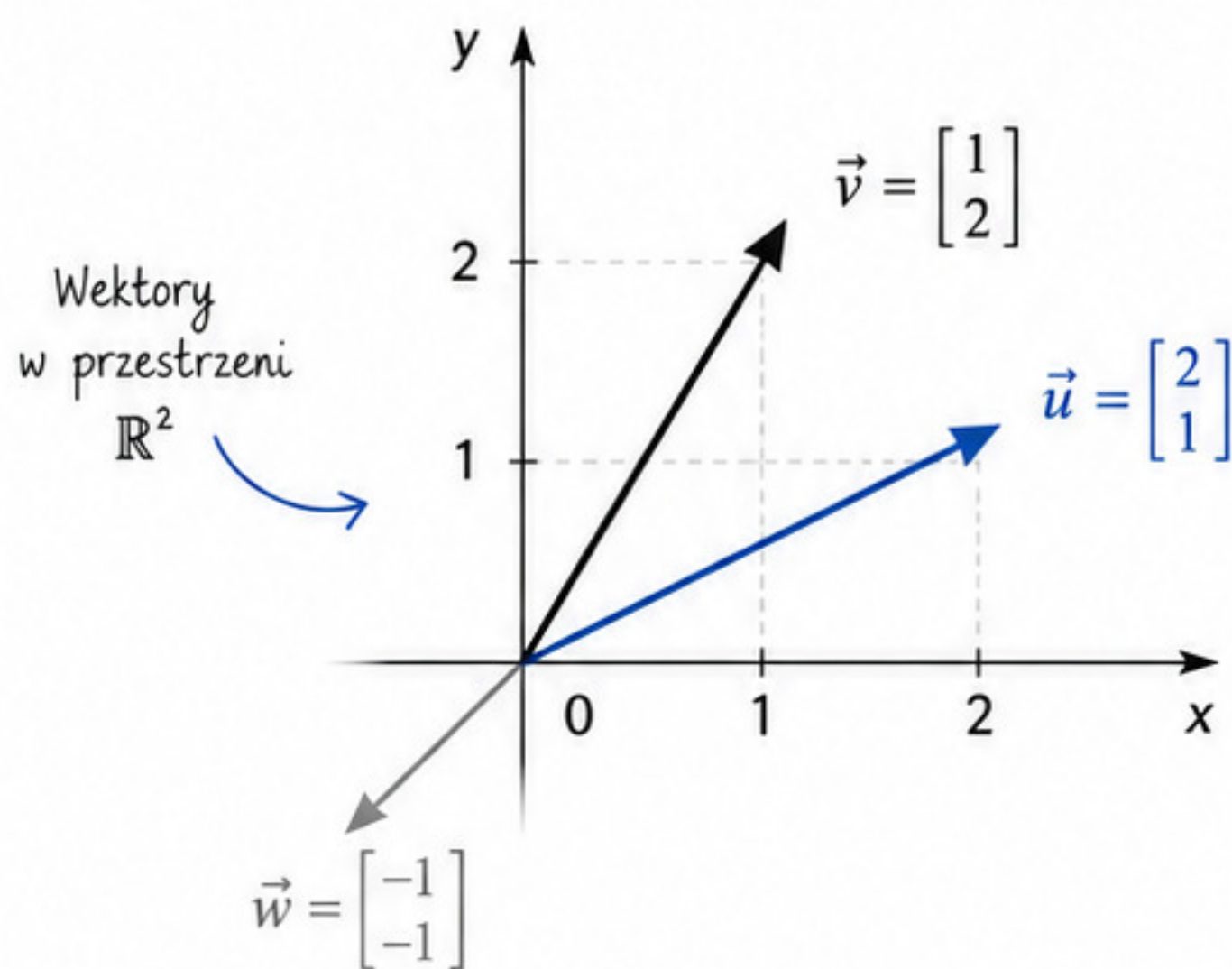


Notatki z Algebry Liniowej

Wektory • Macierze • Wyznaczniki • Układy równań liniowych

Uporządkowane notatki do nauki i szybkiej powtórki



MACIERZ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

macierz 3×3
rzeczywista

WYZNACZNIK

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 39$$

wyznacznik
macierzy A

UKŁAD RÓWNAŃ LINIOWYCH

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 3y + 2z = 4 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$$

rozwiązujemy,
korzystając z metod
algebry liniowej

Copyright



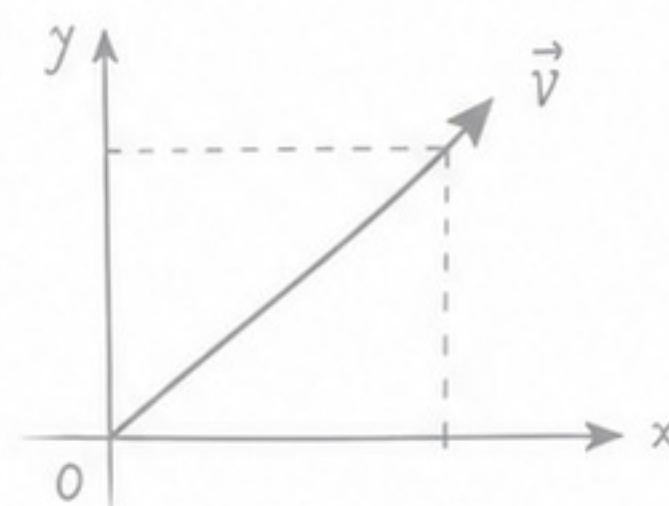
— Notatki z Algebry Liniowej

Materiał edukacyjny do nauki, powtórki i utrwalania podstawowych zagadnień z algebry liniowej.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$



Niniejszy materiał ma charakter pomocniczy i nie zastępuje wykładów, ćwiczeń, konsultacji ani pełnych podręczników akademickich.



— Do użytku własnego.

Zabrania się nieautoryzowanego kopiowania, odsprzedaży oraz rozpowszechniania całości lub fragmentów bez zgody właściciela praw.

Ważne

- 1 Korzystaj z materiału odpowiedzialnie – wspiera on Twoją naukę, ale nie zastępuje samodzielnego myślenia.
- 2 Podczas nauki zawsze weryfikuj rozwiązania i zrozum metodę.



Wszelkie nazwy działów i przykłady służą wyłącznie celom edukacyjnym.



— Wydanie cyfrowe.

Przeznaczone do samodzielnej nauki i druku na potrzeby własne.

Spis treści



WPROWADZENIE

- 00 Okładka
- 01 Copyright
- 02 **Spis treści**
- 03 Jak korzystać z notatek



MODUŁ 01

Wektory i fundamenty 04–11

- 04 Wektory i fundamenty
- 05 Czym jest wektor?
- 06 Współrzędne i reprezentacja wektora
- 07 Dodawanie i odejmowanie wektorów
- 08 Mnożenie wektora przez skalar
- 09 Długość i wektor jednostkowy
- 10 Iloczyn skalarny i kąt między wektorami
- 11 Kombinacja liniowa i zależność liniowa



Ważne!

Każda strona =
jeden główny koncept



MODUŁ 02

Macierze

12–20

Macierze, działania na macierzach,
macierz odwrotna, ślad, rząd macierzy.



MODUŁ 03

Wyznaczniki

21–27

Wyznaczniki, własności, reguła Laplace'a,
wyznacznik macierzy trójkątnej.

$$x = b$$

MODUŁ 04

Układy równań liniowych 28–35

Metody rozwiązywania układów: podstawianie,
eliminacja Gaussa, reguła Cramera,
twierdzenie Rouchégo–Capellego.



MODUŁ 05

Przestrzenie wektorowe, baza i wymiar

36–42

Przestrzenie wektorowe, podprzestrzenie,
baza, wymiar, zmiana bazy, współrzędne.



MODUŁ 06

Przekształcenia i wartości własne

43–49

Przekształcenia liniowe, macierz przekształcenia,
wartości i wektory własne, diagonalizacja.

Jak korzystać z notatek



- 1 Zacznij od intuicji**
najpierw przeczytaj definicję
i spójrz na schemat.



- 2 Przejdź do wzoru**
zauważ, co oznaczają symbole
i kiedy używa się wzoru.



- 3 Sprawdź przykład**
prześledź rozwiązanie
krok po kroku.

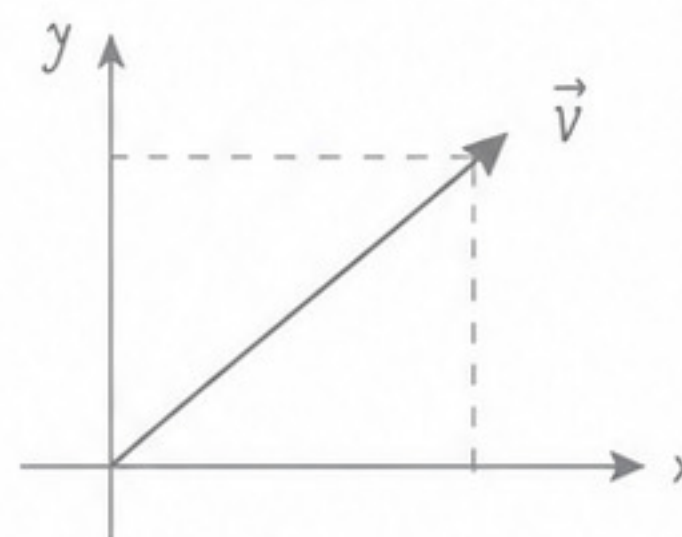


- 4 Zwróć uwagę na uwagi**
małe adnotacje pokazują typowe
błędy i skróty myślowe.



- 5 Powtarzaj aktywnie**
po przeczytaniu spróbuj
odtworzyć pojęcie samodzielnie.

Najlepiej pracować
z kartką i długopisem



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

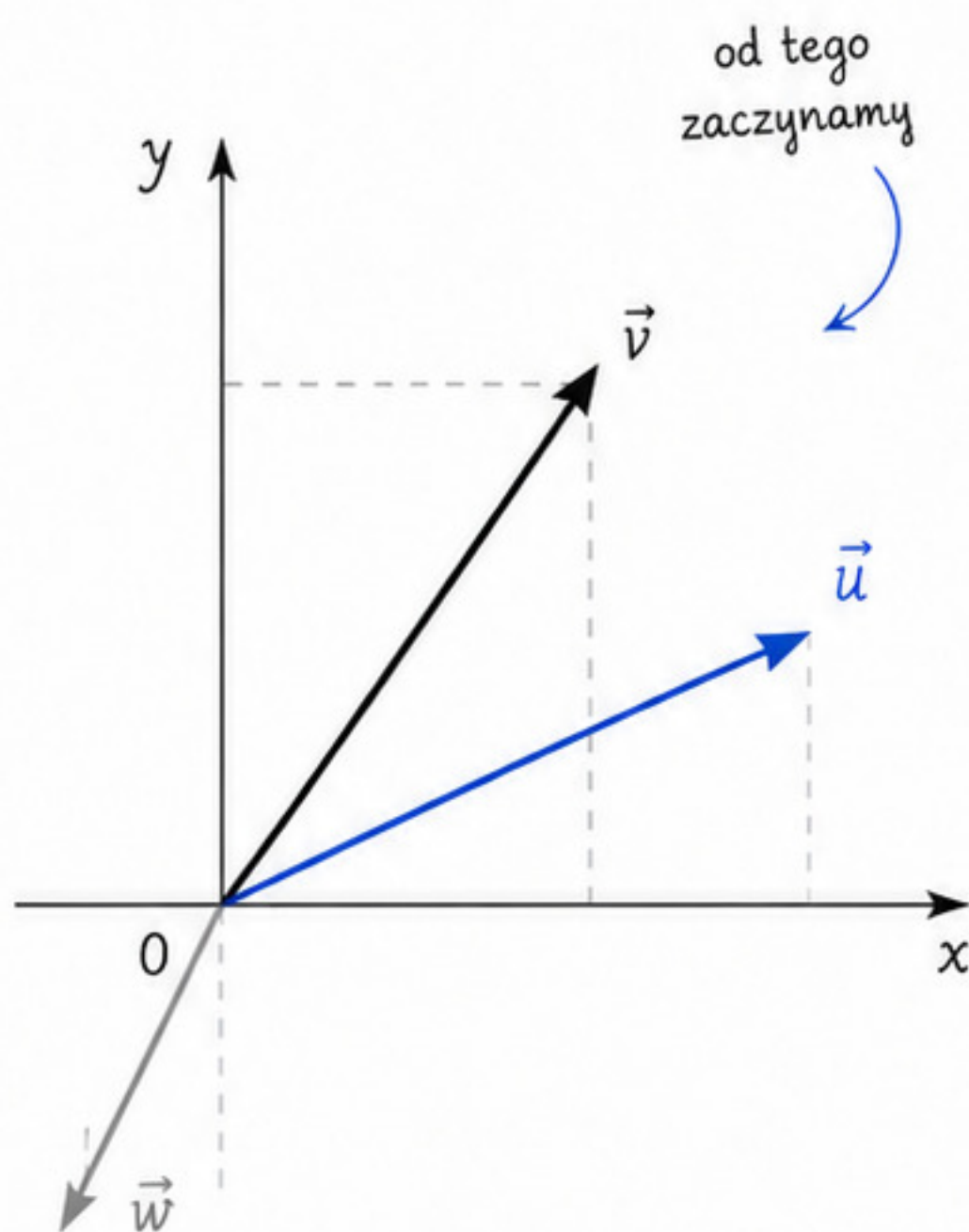
$$\det(A) = 39$$

Legenda kolorów

- niebieski = definicje i akcenty
- zielony = poprawny wynik
- żółty = uwaga
- czerwony = błąd lub ostrzeżenie

Wektory i fundamenty

Podstawowe pojęcia, działania i intuicja geometryczna



W TYM MODUŁE

- 1 Czym jest wektor
- 2 Współrzędne
- 3 Dodawanie i odejmowanie
- 4 Mnożenie przez skalar
- 5 Długość
- 6 Iloczyn skalarny
- 7 Kombinacja liniowa

Czym jest wektor?



Wektor to obiekt matematyczny opisujący **wielkość, kierunek i zwrot**.

WEKTOR



- ma długość (moduł)
- ma kierunek
- ma zwrot
- jest przedstawiany strzałką
- należy do przestrzeni wektorowej

SKALAR

3

- ma tylko wartość liczbową
- nie ma kierunku ani zwrotu
- jest reprezentowany pojedynczą liczbą
- np. masa, temperatura, czas

Zapisy wektorów:

Notacja symboliczna

$\vec{u}$

Współrzędne

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wektor jako strzałka



Intuicja

Wektory opisują różne zjawiska w świecie rzeczywistym. Mogą reprezentować:



przemieszczenie

np. przejście z punktu A do punktu B



prędkość

np. 60 km/h na północ (kierunek i szybkość)



siłę

np. pchnięcie wózka z określoną siłą i kierunkiem

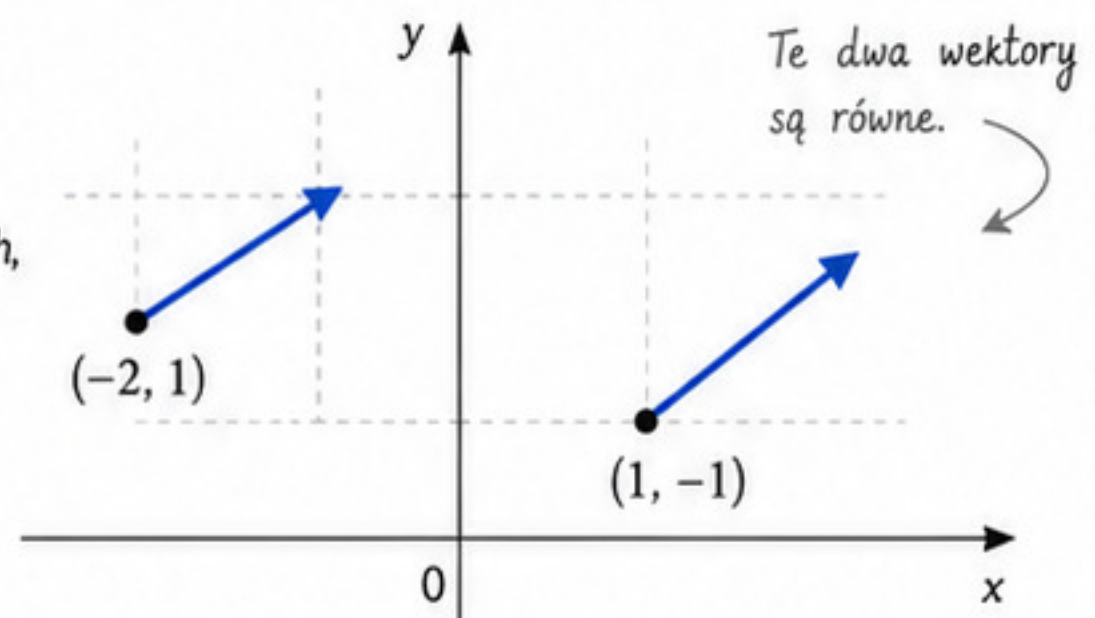


Położenie nie jest najważniejsze — liczy się długość i kierunek.



Przykład

Wektory mogą być narysowane w różnych miejscach, ale jeśli mają tę samą długość, kierunek i zwrot, reprezentują ten sam wektor.



Współrzędne i reprezentacja wektora



— Wektory w $\mathbb{R}^2$.

W płaszczyźnie każdy wektor można zapisać jako parę współrzędnych:

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \quad \text{lub} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$



— Wektory w $\mathbb{R}^3$.

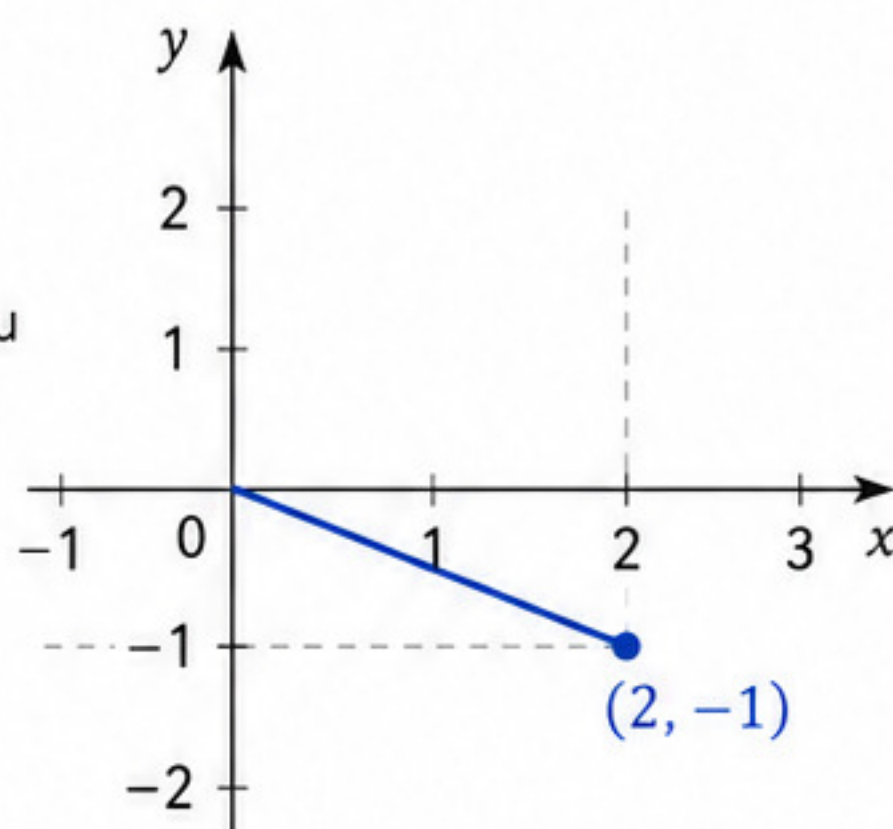
W przestrzeni trójwymiarowej:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$



Przykład w $\mathbb{R}^2$.

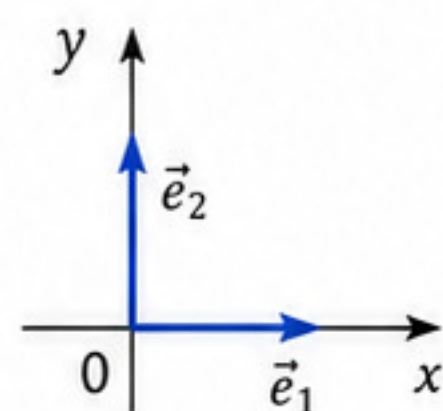
Wektor od początku układu do punktu $(2, -1)$.



Baza standardowa

$$\vec{e}_1 = (1, 0)$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1)$$



— Równoważne zapisy wektora $\vec{u}$ z przykładu:

$$(2, -1)$$

$\nearrow$
para współrzędnych

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$
wektor kolumnowy

$$2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

$\uparrow$
kombinacja wektorów
bazy standardowej



Ważne

Współrzędne mówią, ile przesuwamy się wzdłuż każdej osi.

Dodawanie i odejmowanie wektorów



— Zasada.

Dodawanie i odejmowanie wektorów wykonujemy współrzędna po współrzędnej.



— Wzory.

Niech $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ oraz $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix}$$



— Przykład.

Niech $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



— Uwaga.

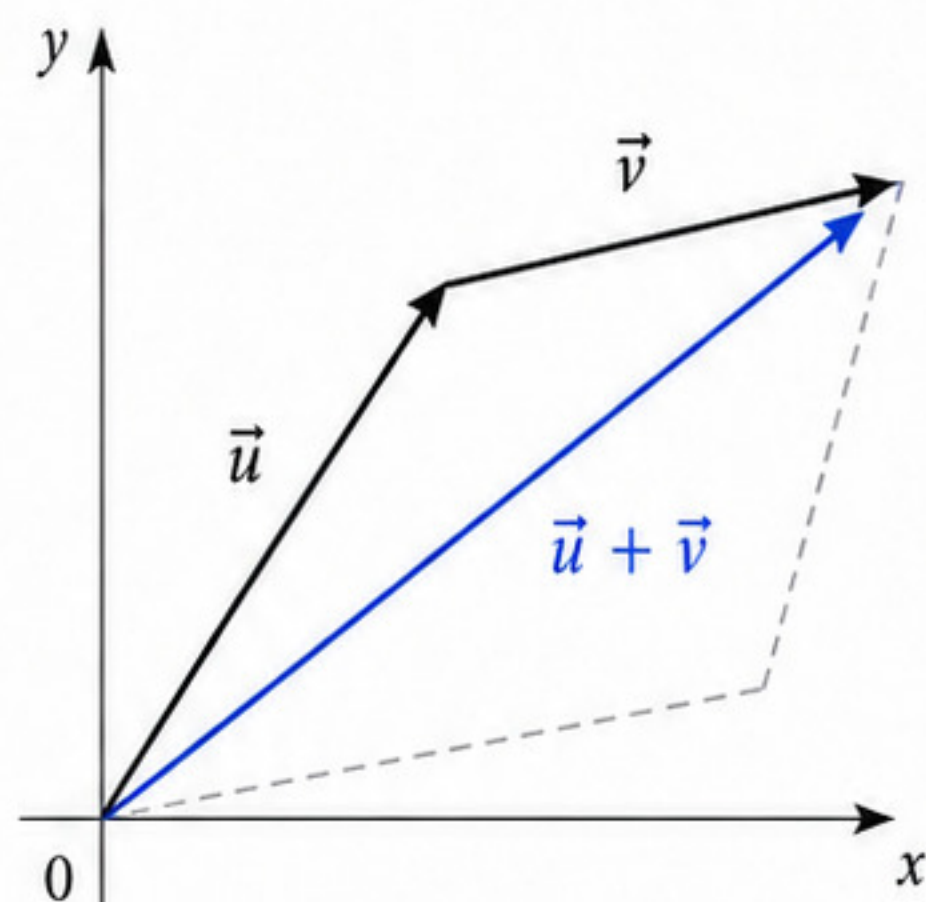
Odejmowanie można traktować jako dodawanie wektora przeciwnego:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

Gdzie $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}$.

— Interpretacja geometryczna.

Reguła trójkąta (równoważnie reguła równoległoboku).



graficznie dodawanie oznacza dołożenie jednego wektora do końca drugiego.

Mnożenie wektora przez skalar

Σ

Definicja.

Dla skalara $k \in \mathbb{R}$ i wektora $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ iloczyn skalarny definiujemy wzorem:

$$k\vec{u} = \begin{pmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{pmatrix}$$



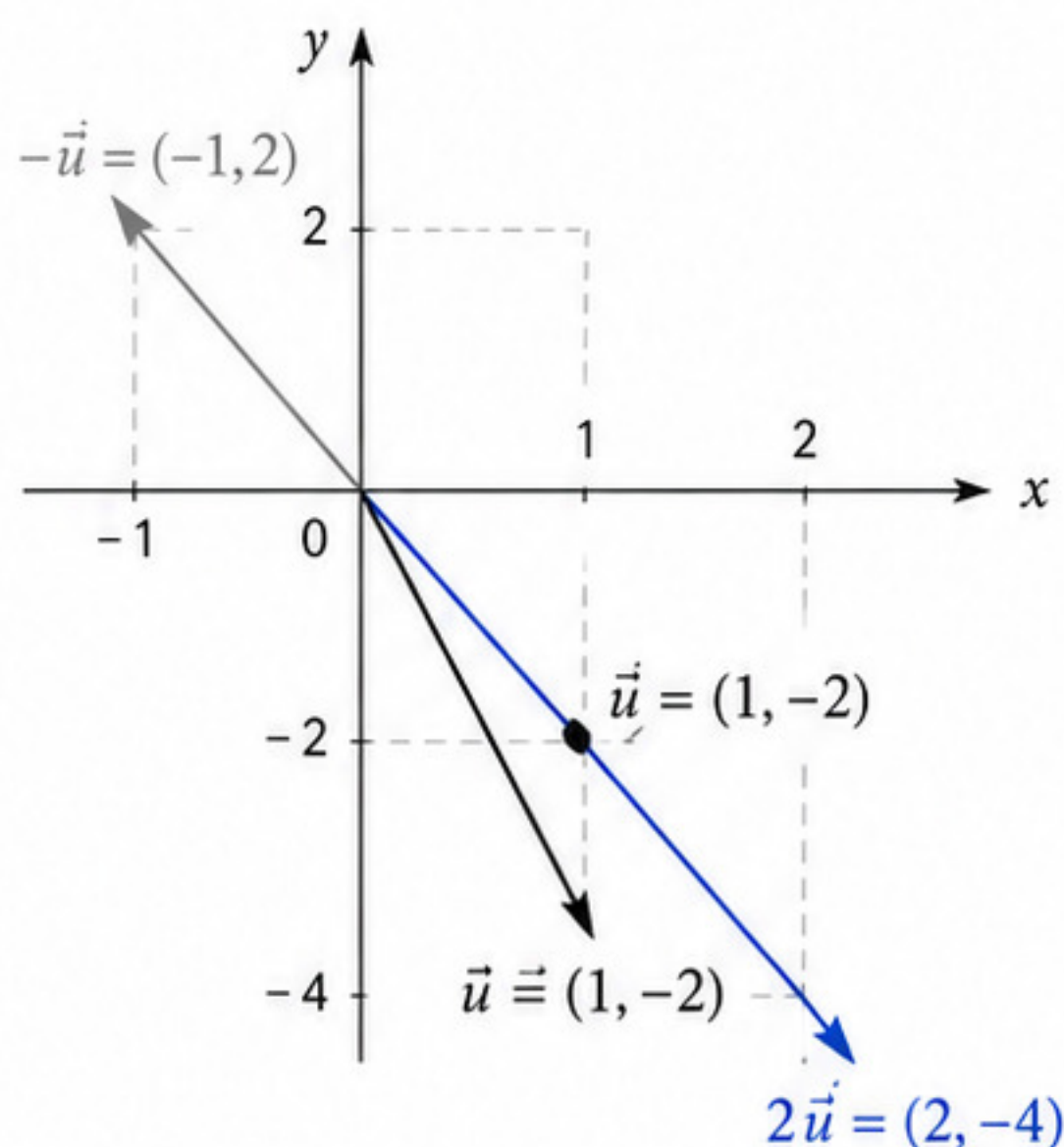
Intuicyjnie.

- Jeśli $|k| > 1$ – wektor staje się dłuższy.
- Jeśli $0 < |k| < 1$ – wektor staje się krótszy.
- Jeśli $k < 0$ – wektor zmienia zwrot (obraca się o 180°).



Przykłady.

- $2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$
- $-1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $0 \cdot \vec{u} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



Interpretacja geometryczna

- $|k| > 1$ wektor wydłuża się $|k|$ razy.
- $0 < |k| < 1$ wektor skraca się $|k|$ razy.
- $k < 0$ wektor zmienia zwrot (obróć o 180°).



Ważne Skalar zmienia długość, a czasem także zwrot, ale nie zmienia samej natury obiektu — nadal mamy wektor.

Długość i wektor jednostkowy



— Długość (norma) wektora.

Długość wektora $\vec{u} = (u_1, u_2)$ obliczamy ze wzoru $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

W przestrzeni 3D: $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Przykład

Dla $\vec{u} = (3, 4)$:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$



— Wektor jednostkowy.

Wektor jednostkowy ma długość 1 i ten sam kierunek co dany wektor. Wyznaczamy go ze wzoru

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

Przykład

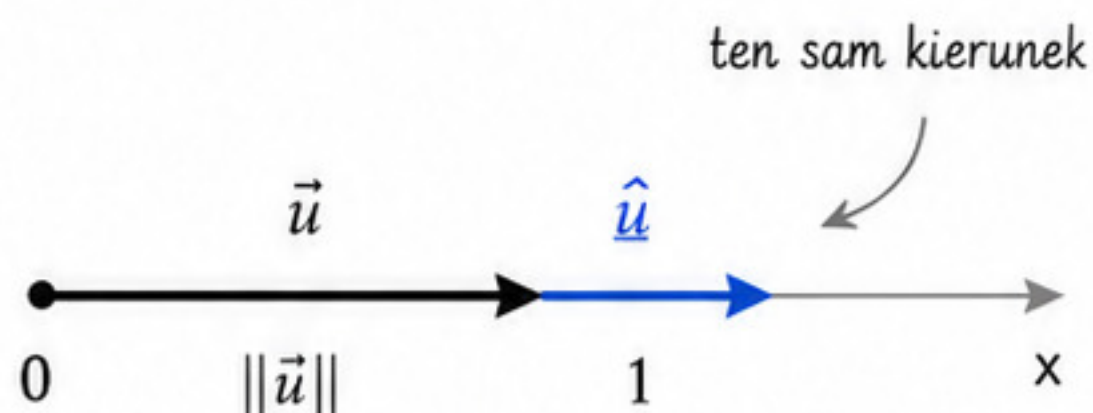
Dla $\vec{u} = (3, 4)$ i $\|\vec{u}\| = 5$:

$$\hat{u} = \frac{(3, 4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$



— Kierunek bez zmian.

Wektor jednostkowy wskazuje ten sam kierunek co oryginalny wektor, ale ma długość równą 1.



— Uwaga.

Nie można znormalizować wektora zerowego.



Norma mierzy „jak długi” jest wektor.

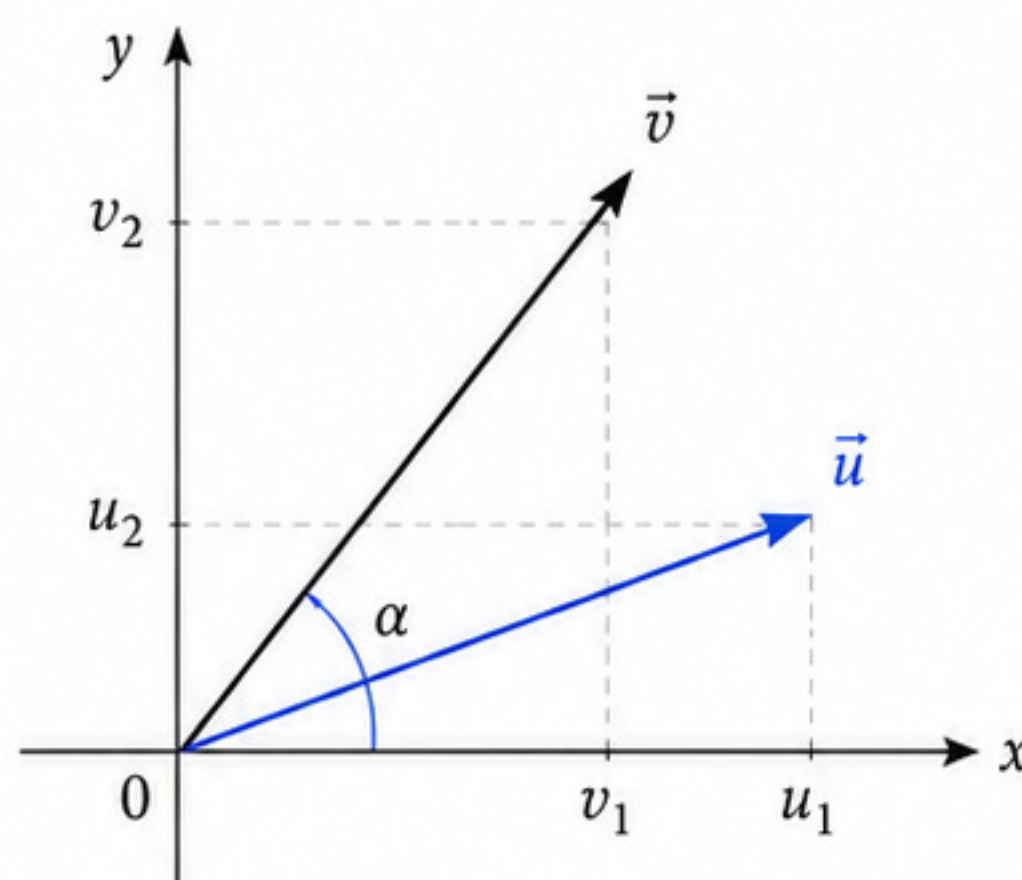
Iloczyn skalarny i kąt między wektorami

Σ

1. Definicja.

Dla wektorów $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ i $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ iloczyn skalarny definiujemy wzorem:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$$



2. Znaczenie geometryczne.

Iloczyn skalarny wyraża się przez długości wektorów oraz kąt α między nimi:

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \alpha$$

gdzie $\alpha \in [0, \pi]$ jest kątem między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$.



3. Przykład.

Niech $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ oraz $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Iloczyn skalarny:

$$u \cdot v = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

- Długości wektorów:

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\|v\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

- Kąt między wektorami:

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \alpha$$

$$4 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cos \alpha = 5 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \approx 36,87^\circ$$



Prostopadłość

Jeśli $u \cdot v = 0$, to wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są prostopadłe.

Odwrotnie — jeśli wektory są prostopadłe, to $u \cdot v = 0$.

Kombinacja liniowa i zależność liniowa

1

Kombinacja liniowa.

Niech $v_1, v_2, \dots, v_k$ będą wektorami, a $a_1, a_2, \dots, a_k$ — skalarami.

Wektor postaci

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k$$

nazywamy **kombinacją liniową** wektorów $v_1, v_2, \dots, v_k$.

2

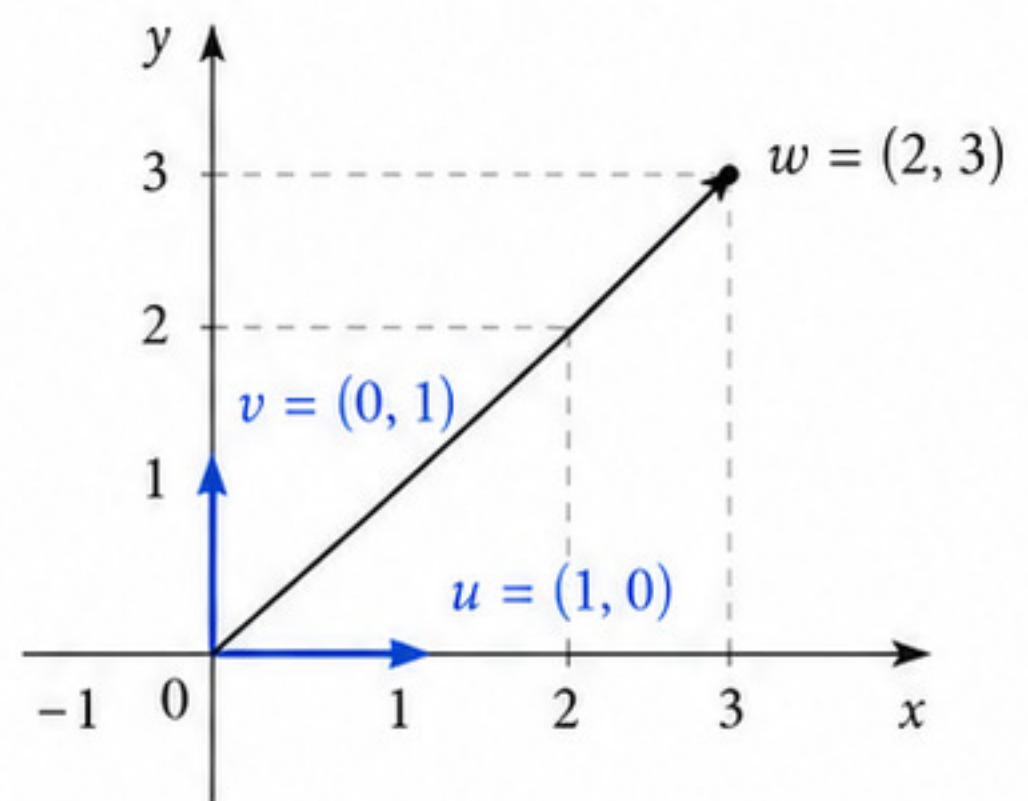
Przykład.

Niech $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

oraz $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Wtedy

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2u + 3v$$



3

Liniowa zależność.

Wektory $v_1, v_2, \dots, v_k$ nazywamy **liniowo zależnymi**, jeśli można zapisać któryś z nich jako kombinację liniową pozostałych wektorów.

4

Niezależne a zależne.

Niezależne

Wektory są liniowo niezależne, jeśli żaden z nich nie jest kombinacją liniową pozostałych.

Przykład: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ są liniowo niezależne.

Zależne

Wektory są liniowo zależne, jeśli któryś z nich jest kombinacją liniową pozostałych.

Przykład: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ są liniowo zależne, bo $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5



Wniosek Niezależność oznacza, że żaden wektor nie jest zbędny.

Macierze

Typy macierzy, działania i najważniejsze operacje

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

tu zaczynamy

W TYM MODUŁE

- 1 Czym jest macierz
- 2 Rodzaje macierzy
- 3 Dodawanie i odejmowanie
- 4 Mnożenie przez skalar
- 5 Mnożenie macierzy
- 6 Transpozycja
- 7 Macierz odwrotna
- 8 Rząd macierzy i redukcja

Czym jest macierz?



— Definicja.

Macierz to prostokątny układ liczb ułożonych w wiersze i kolumny.

Notacja macierzy

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

gdzie a_{ij} to element macierzy znajdujący się w i -tym wierszu i j -tej kolumnie.



— Wymiary macierzy.

- m — liczba wierszy,
- n — liczba kolumn.

Macierz o wymiarach $m \times n$ ma $m \cdot n$ elementów.



— Przykład.

Macierz o wymiarach 2×3 :

3 kolumny

↓ ↓ ↓

2 wiersze {

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

element w 1. wierszu,
2. kolumnie

Do czego służą macierze?



opis układów równań



reprezentacja danych



przekształcenia liniowe



Ważne

Macierz to uporządkowany zapis liczb — ważna jest zarówno wartość, jak i położenie elementu.

Rodzaje macierzy



Macierz to prostokątny układ liczb ze zbioru $\mathbb{R}$ (lub innego zbioru).
Poniżej najważniejsze rodzaje macierzy.

1 Macierz kwadratowa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Ma tyle samo wierszy, co kolumn ($n \times n$).

2 Macierz prostokątna

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Liczba wierszy różna od liczby kolumn ($m \times n$).

3 Macierz zerowa

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wszystkie jej elementy są równe 0.

4 Macierz jednostkowa

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz kwadratowa z jedynkami na diagonalu głównej, a poza nią same zera.

5 Macierz diagonalna

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Wszystkie elementy poza przekątną są równe 0.

6 Macierz trójkątna górna

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Wszystkie elementy poniżej przekątnej głównej są równe 0.

7 Macierz symetryczna

$$S = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Macierz kwadratowa spełniająca $S^T = S$.

8 Macierz kolumnowa / wierszowa

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad w = [2 \quad -3 \quad 1 \quad 0]$$

Macierz z jedną kolumną ($n \times 1$) lub jednym wierzem ($1 \times n$).



Nazwy macierzy zwykle opisują ich kształt albo rozmieszczenie elementów.

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie przez skalar



Zasada. Dodawanie i odejmowanie macierzy są możliwe tylko wtedy, gdy macierze mają ten sam rozmiar (tę samą liczbę wierszy i kolumn).

Wzory

Dodawanie

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

(tego samego rozmiaru)

Odejmowanie

$$A - B = [a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]$$

(tego samego rozmiaru)

Mnożenie przez skalar

$$kA = k[a_{ij}] = [ka_{ij}]$$

($k \in \mathbb{R}$)



Przykład 1. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

• Dodawanie

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+3 & 2+(-1) \\ 0+2 & 1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

• Odejmowanie

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-3 & 2-(-1) \\ 0-2 & 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Przykład 2. Mnożenie macierzy przez skalar. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $k = 2$:

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Uwaga! Ten sam rozmiar jest obowiązkowy przy dodawaniu i odejmowaniu.

Mnożenie macierzy



— 1. Warunek wymiarów.

Jeśli macierz A ma wymiar $m \times n$, a macierz B ma wymiar $n \times p$, to iloczyn AB jest określony i ma wymiar $m \times p$.

$$\underbrace{\begin{matrix} A & \cdot & B \\ m \times n & & n \times p \end{matrix}}_{\text{wspólny wymiar } n} = \begin{matrix} AB \\ m \times p \end{matrix}$$



— 2. Element c_{ij} .

Element macierzy iloczynu $C = AB$ w wierszu i i kolumnie j wyliczamy jako iloczyn skalarny i -tego wiersza macierzy A oraz j -tej kolumny macierzy B .

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$



— 3. Ilustracja: wiersz razy kolumna.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{i\text{-ty wiersz } A} \cdot B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = C = AB \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & c_{ij} & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

i -ty wiersz A
mnożymy przez j -tą
kolumnę B

j -ta kolumna B



— 4. Przykład.

Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Wymiary: A ma 2×2 , B ma $2 \times 2 \rightarrow$ iloczyn AB jest określony i ma wymiar 2×2 .

$$c_{11} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7$$

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 1 + 8 = 9$$

$$c_{21} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 0 + 2 = 2$$

$$c_{22} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 0 + 4 = 4$$

Zatem $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.



Uwaga Mnożenie macierzy na ogół nie jest przemienne: $AB \neq BA$.

Transpozycja macierzy



— Definicja.

Transpozycja macierzy polega na zamianie jej wierszy na kolumny (i kolumn na wiersze).

Transpozycję macierzy A oznaczamy przez A^T .



— Przykład.

Niech $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{transpozycja}}$ $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$

2×3 3×2



— Właściwości transpozycji.

① $(A^T)^T = A$

② $(A + B)^T = A^T + B^T$

③ $(AB)^T = B^T A^T$



Jeśli $A^T = A$,
to macierz jest
symetryczna.

Macierz odwrotna



Definicja.

Macierz A^{-1} nazywamy macierzą odwrotną do macierzy A , gdy spełnione są obie równości:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową odpowiedniego wymiaru.



Uwaga

Macierze odwrotne istnieją tylko dla macierzy kwadratowych ($n \times n$), które są odwracalne.

Warunek (2×2)



Dla macierzy kwadratowej rzędu 2×2 macierz odwrotna istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy jest różny od zera:

$$\det(A) \neq 0$$



Wzór (2×2).

Jeśli $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i $\det(A) = ad - bc \neq 0$, to

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

← zamiana +
zmiana znaków



Przykład.

- Rozważmy macierz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Wyznacznik:

$$\det(A) = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{macierz } A \text{ jest odwracalna.}$$

- Macierz odwrotna:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Sprawdzenie:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Rząd macierzy



— Definicja.

Rząd macierzy to liczba **liniowo niezależnych wierszy** (lub — równoważnie — kolumn) macierzy.



Po sprowadzeniu macierzy do postaci schodkowej wierszowej rząd macierzy jest równy liczbie **niezerowych wierszy** (wierszy przestawnych).



Przykład 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} 1 \text{ niezerowy} \\ \text{wiersz} \end{matrix}$$

$$\text{rank}(A) = 1$$



Przykład 2.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow R_2 \text{ (bez zmian)} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} 2 \text{ niezerowe} \\ \text{wiersze} \end{matrix}$$

$$\text{rank}(B) = 2$$



Rząd macierzy mówi, ile **niezależnej informacji** zawiera macierz.

Operacje elementarne i redukcja Gaussa



— 1. Idea.

Operacje elementarne na wierszach pozwalają upraszczać macierz bez zmiany zbioru rozwiązań układu.



— 2. Trzy operacje elementarne.

- $R_i \leftrightarrow R_j$ — zamiana dwóch wierszy.
- $R_i \leftarrow kR_i, k \neq 0$ — mnożenie wiersza przez niezerowy skalar.
- $R_i \leftarrow R_i + kR_j$ — dodanie do wiersza wielokrotności innego wiersza.



— 3. Cel redukcji.

Chcemy otrzymać postać schodkową wierszową, w której łatwo wskazać pivoty i dalej rozwiązywać układ.

pivot — pierwszy niezerowy element w wierszu.



— 4. Przykład.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

↖ postać schodkowa wierszowa



Uwaga. Redukcja Gaussa porządkuje macierz krok po kroku, ale trzeba pilnować poprawnych operacji na całych wierszach.

Wyznaczniki

Znaczenie, obliczanie i związek z odwracalnością macierzy

W TYM MODUŁE

- 1 Co oznacza wyznacznik
- 2 Wyznacznik macierzy 2×2
- 3 Wyznacznik macierzy 3×3
- 4 Rozwinięcie Laplace'a
- 5 Własności wyznaczników
- 6 Wyznacznik a odwracalność macierzy

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5$$


tu zaczynamy

Co oznacza wyznacznik?



— 1. Definicja.

Wyznacznik macierzy kwadratowej to liczba przypisana tej macierzy. Oznaczamy go przez $\det(A)$ lub $|A|$.



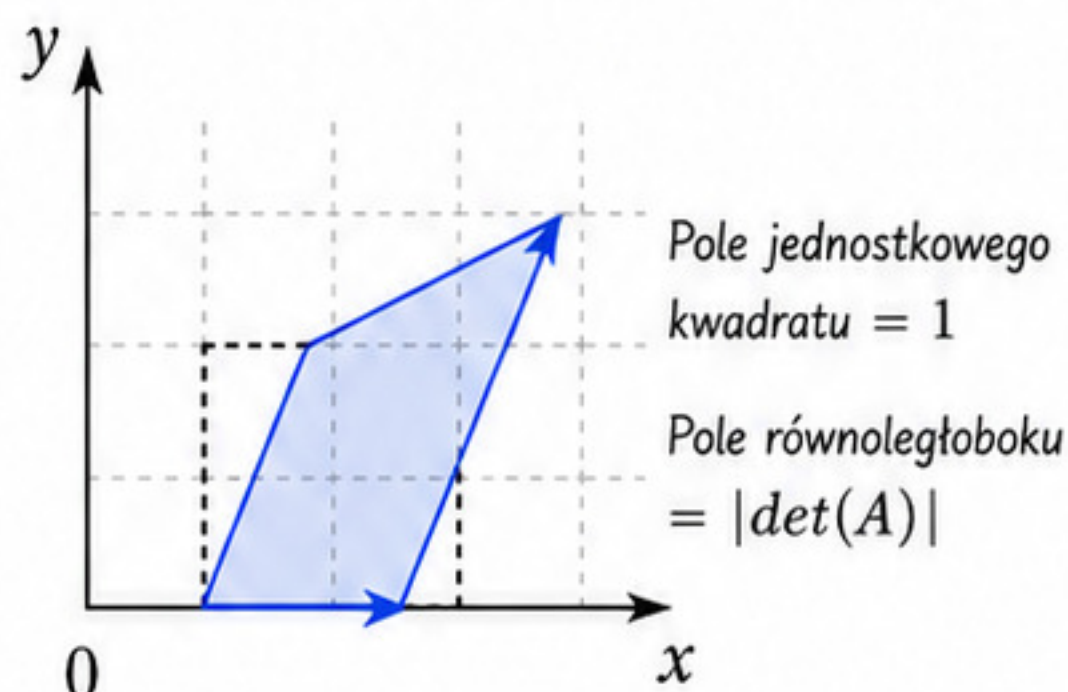
— 2. Kiedy jest zdefiniowany?

Wyznacznik definiujemy tylko dla macierzy kwadratowych.



— 3. Interpretacja geometryczna.

- W $\mathbb{R}^2$ wartość $|\det(A)|$ mówi, ile razy przekształcenie skaluje pole.
- W $\mathbb{R}^3$ wartość $|\det(A)|$ mówi, ile razy przekształcenie skaluje objętość.
- Znak wyznacznika informuje o orientacji.



— 4. Interpretacja algebraiczna.

- $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ macierz jest odwracalna.
- $\det(A) = 0 \Rightarrow$ przekształcenie spłaszcza przestrzeń, a wiersze lub kolumny są liniowo zależne.



— 5. Przykład.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1$$



Najważniejsze: $|\det(A)|$ mierzy skalę pola lub objętości, a zerowy wyznacznik oznacza utratę odwracalności.

Wyznacznik macierzy 2×2



— 1. Wzór.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{wtedy} \quad \det(A) = ad - bc.$$

Zapamiętaj: iloczyn przekątnej głównej minus iloczyn przekątnej pobocznej.



— 2. Przykład.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 12 - 2 = 10$$



— 3. Interpretacja.

- Jeśli $\det(A) \neq 0$, macierz jest odwracalna.
- Jeśli $\det(A) = 0$, wiersze lub kolumny są liniowo zależne.



Dla macierzy 2×2 obliczanie wyznacznika jest szybkie i bardzo często używane w praktyce.

Wyznacznik macierzy 3×3



— 1. Reguła Sarrusa.

Dla macierzy

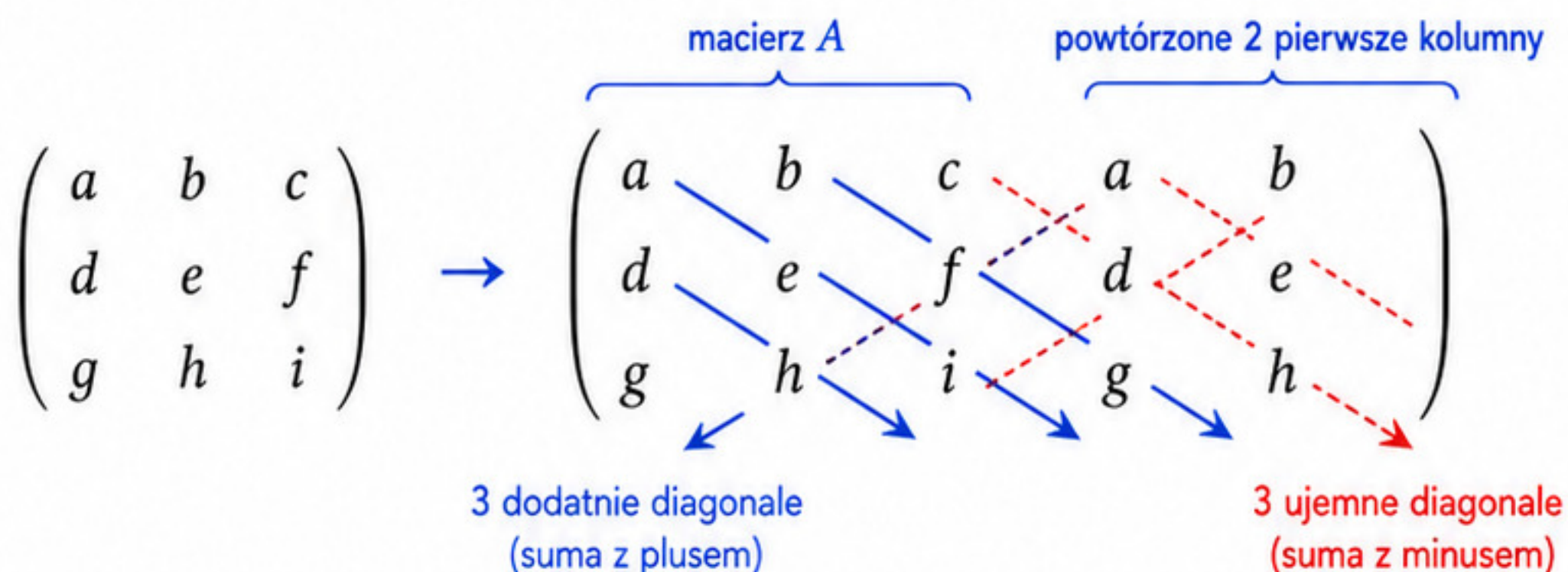
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

mamy zwartą postać:

$$\det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$



— 2. Reguła Sarrusa — ilustracja.



— 3. Przykład.

Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

pozytywne diagonale: $1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 1 = 12 + 8 + 0 = 20$

ujemne diagonale: $1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 6 + 0 + 2 = 8$

$$\det(A) = 20 - 8 = 12$$



Uwaga. Reguła Sarrusa działa tylko dla macierzy 3×3 .
Dla większych macierzy używamy innych metod.

Rozwinięcie Laplace'a



— 1. Idea.

Rozwinięcie Laplace'a polega na obliczaniu wyznacznika przez rozwinięcie względem wybranego wiersza lub kolumny.



— 2. Minor i dopełnienie algebraiczne.

M_{ij} — wyznacznik podmacierzy otrzymanej po usunięciu i -tego wiersza i j -tej kolumny.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$$

← analogicznie
dla kolumny



— 3. Przykład.

Rozwińmy wyznacznik względem pierwszego wiersza macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (3 \cdot 1 - 2 \cdot 4) + 1 \cdot (1 \cdot 4 - 0 \cdot 3) \\ &= 2 \cdot (-5) + 4 = \boxed{-6} \end{aligned}$$



Praktyczna wskazówka:

wybieraj wiersz lub kolumnę z wieloma zerami — rachunki będą krótsze.

Własności wyznaczników

1

$$I_n$$

$$\det(I_n) = 1.$$

2

$$A^T$$

$$\det(A^T) = \det(A).$$

3

$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

4



Zamiana dwóch wierszy (lub kolumn) zmienia znak wyznacznika.

5



Pomnożenie jednego wiersza przez k mnoży wyznacznik przez k .

6



Dodanie do jednego wiersza wielokrotności innego wiersza nie zmienia wyznacznika.

7



Jeśli dwa wiersze są proporcjonalne lub identyczne, to $\det(A) = 0$.

8

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Dla macierzy trójkątnej wyznacznik jest iloczynem elementów na przekątnej głównej.



Własności wyznaczników są szczególnie przydatne przy redukcji macierzy i szybkich obliczeniach.

Wyznacznik a odwracalność macierzy

$$\det(A) \neq 0 \iff A \text{ jest odwracalna}$$

$$\det(A) = 0 \iff A \text{ jest osobliwa (nieodwracalna)}$$

- Niezerowy wyznacznik oznacza, że istnieje macierz odwrotna A^{-1} .
- Zerowy wyznacznik oznacza liniową zależność wierszy lub kolumn.
- Dla układu $Ax = b$ warunek $\det(A) \neq 0$ daje jednoznaczne rozwiązanie.

Przykład odwracalny

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = \boxed{1}$$

B^{-1} istnieje

Przykład nieodwracalny

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = \boxed{0}$$

brak macierzy odwrotnej



Wyznacznik jest szybkim testem odwracalności dla macierzy kwadratowych.

Układy równań liniowych

Od zapisu macierzowego do metod rozwiązywania

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$



$$Ax = b$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$



teraz rozwiązujemy

W TYM MODUŁE

- 1 Zapis układu w postaci macierzowej
- 2 Eliminacja Gaussa
- 3 Metoda Gaussa-Jordana
- 4 Liczba rozwiązań układu
- 5 Twierdzenie Kroneckera-Capellego
- 6 Reguła Cramera
- 7 Kompletny przykład krok po kroku

Zapis układu w postaci macierzowej



— 1. Układ ogólny.

Rozważmy układ m równań z n niewiadomymi $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$



— 2. Zapis macierzowy.

Układ można zapisać w postaci zwartej:

$$Ax = b$$



— 3. Co oznaczają symbole?

A

macierz
współczynników.

x

wektor
niewiadomych.

b

wektor
wyrazów wolnych.



— 4. Przykład.

Rozważmy układ:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Zapis macierzowy:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Macierz rozszerzona:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

Stąd

$$Ax = b$$



Zapis macierzowy porządkuje układ i przygotowuje go do metod Gaussa, Gaussa-Jordana i Reguły Cramera.

Eliminacja Gaussa

rozwiązanie układu krok po kroku



1. Idea.

Redukujemy macierz rozszerzoną do postaci schodkowej.



2. Układ równań.

Macierz rozszerzona:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right]$$



3. Krok 1.

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$$

→

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right]$$



4. Krok 2.

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$$

→

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array} \right]$$



5. Krok 3.

Wygodna zamiana wierszy:

$$R_2 \leftrightarrow R_3$$

→

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \end{array} \right]$$



6. Krok 4.

$$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2$$

→

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array} \right]$$

postać schodkowa

pivot

— pierwszy niezerowy element w wierszu.



Po postaci schodkowej stosujemy podstawianie wsteczne.

Gauss-Jordan

rozwiązanie bez podstawiania wstecznego



— Start: postać schodkowa z poprzedniej metody

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array} \right]$$



— Krok 1.

$$R_3 \leftarrow -\frac{1}{7} R_3$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$



— Krok 2.

$$R_2 \leftarrow R_2 + 2R_3$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$



— Krok 3.

$$R_1 \leftarrow R_1 - R_3$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$



— Krok 4.

$$R_1 \leftarrow R_1 - R_2$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$



$$\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array}$$

PORÓWNANIE

Gauss

- kończy na postaci schodkowej,
- wymaga podstawiania wstecznego.

Gauss-Jordan

- kończy na zredukowanej postaci schodkowej,
- rozwiązanie odczytujemy bezpośrednio.



„Gauss upraszcza wystarczająco.
Gauss-Jordan upraszcza *maksymalnie*.”

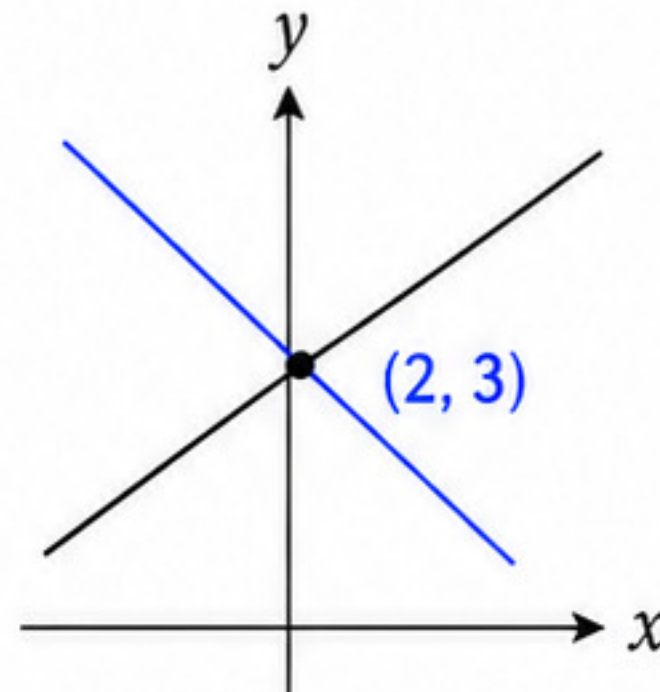
Liczba rozwiązań układu

Jedno, nieskończenie wiele czy brak rozwiązań?

1 — Dokładnie jedno rozwiązanie

Macierz zredukowana:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3 \end{array}$$

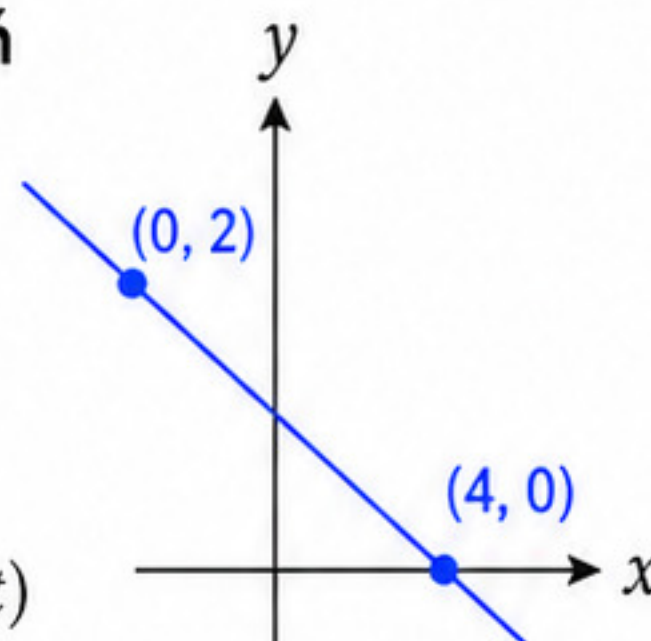


Dwie proste przecinają się w jednym punkcie.

2 — Nieskończenie wiele rozwiązań

Macierz zredukowana:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} y = t \\ x = 4 - 2t \\ (x, y) = (4 - 2t, t) \end{array}$$

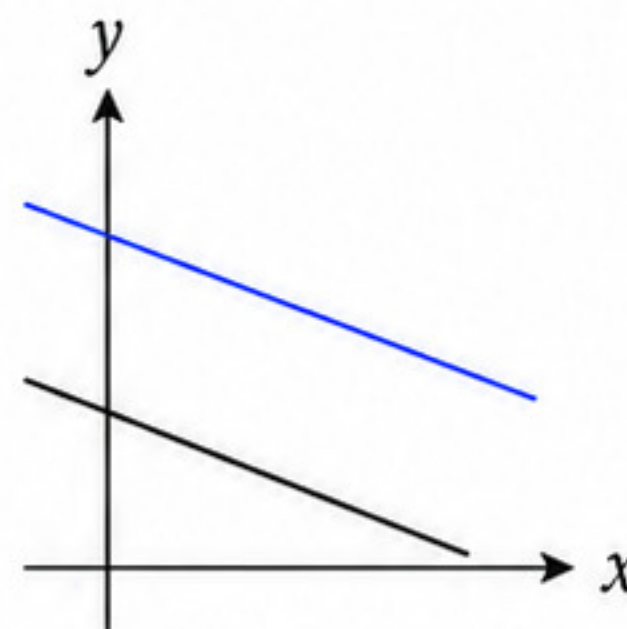


Dwa równania opisują tę samą prostą.

3 — Brak rozwiązań

Macierz zredukowana:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \rightarrow 0 = 5$$



Dwie proste są równoległe i różne.



Jeśli po redukcji pojawi się wiersz $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & c \end{array} \right]$, gdzie $c \neq 0$, układ jest sprzeczny.

Twierdzenie Kroneckera-Capellego

test istnienia rozwiązań

Układ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r(A) = r([A|b]).$$


1. Konsekwencje.

- $r(A) \neq r([A|b]) \rightarrow$ układ jest sprzeczny — brak rozwiązań.
- $r(A) = r([A|b]) = n \rightarrow$ układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
- $r(A) = r([A|b]) < n \rightarrow$ układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.



2. Schemat decyzyjny.



3. Przykład.

Rozważmy układ $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Macierz rozszerzona:

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array} \right)$$

Po redukcji wierszowej:

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A) = 1, \quad r([A|b]) = 1, \quad n = 2 \quad \text{Zatem } r(A) = r([A|b]) < n.$$



Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Reguła Cramera

rozwiązanie przez wyznaczniki



1. Idea.

Reguła Cramera pozwala rozwiązać układ równań liniowych metodą wyznaczników, ale tylko wtedy, gdy $\det(A) \neq 0$.

Dla układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)}, \quad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)}$$



2. Przykład.

Rozważmy układ:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Zapis macierzowy:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy A :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (2)(-1) - (1)(1) = -3 \end{aligned}$$

$$\det(A) = -3 \neq 0$$



3. Wyznaczenie x .

Zastępujemy pierwszą kolumnę macierzy A wektorem b :

$$A_x = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \det(A_x) = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (5)(-1) - (1)(1) = -6$$

$$\Rightarrow x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-6}{-3} = \boxed{2}$$



4. Wyznaczenie y .

Zastępujemy drugą kolumnę macierzy A wektorem b :

$$A_y = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \det(A_y) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (5)(1) = -3$$

$$\Rightarrow y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-3}{-3} = \boxed{1}$$



5. Rozwiązanie układu.

$$(x, y) = (2, 1)$$



Uwaga. Reguła Cramera działa dla kwadratowych układów z niezerowym wyznacznikiem.

Kompletny przykład krok po kroku

1 — Układ równań.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

2 — Zapis macierzy rozszerzonej.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

3 — Redukcja Gaussa do postaci schodkowej.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array} \right]$$

4 — Podstawianie wsteczne.

• Z trzeciego wiersza: $-7z = -21 \rightarrow z = 3$



• Z drugiego wiersza: $y - 2z = -4 \rightarrow y - 2 \cdot 3 = -4 \rightarrow y = 2$



• Z pierwszego wiersza: $x + y + z = 6 \rightarrow x + 2 + 3 = 6 \rightarrow x = 1$

5 — Wynik.

$$(x, y, z) = (1, 2, 3)$$

SCHEMAT METODY

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz rozszerzona



$$\begin{bmatrix} \circ & \rightarrow \\ \circ & \rightarrow \\ \circ & \rightarrow \end{bmatrix}$$

Redukcja Gaussa



$$\begin{bmatrix} \text{step} \\ \text{step} \\ \text{step} \end{bmatrix}$$

Postać schodkowa



$$\text{pencil icon}$$

Podstawianie wsteczne

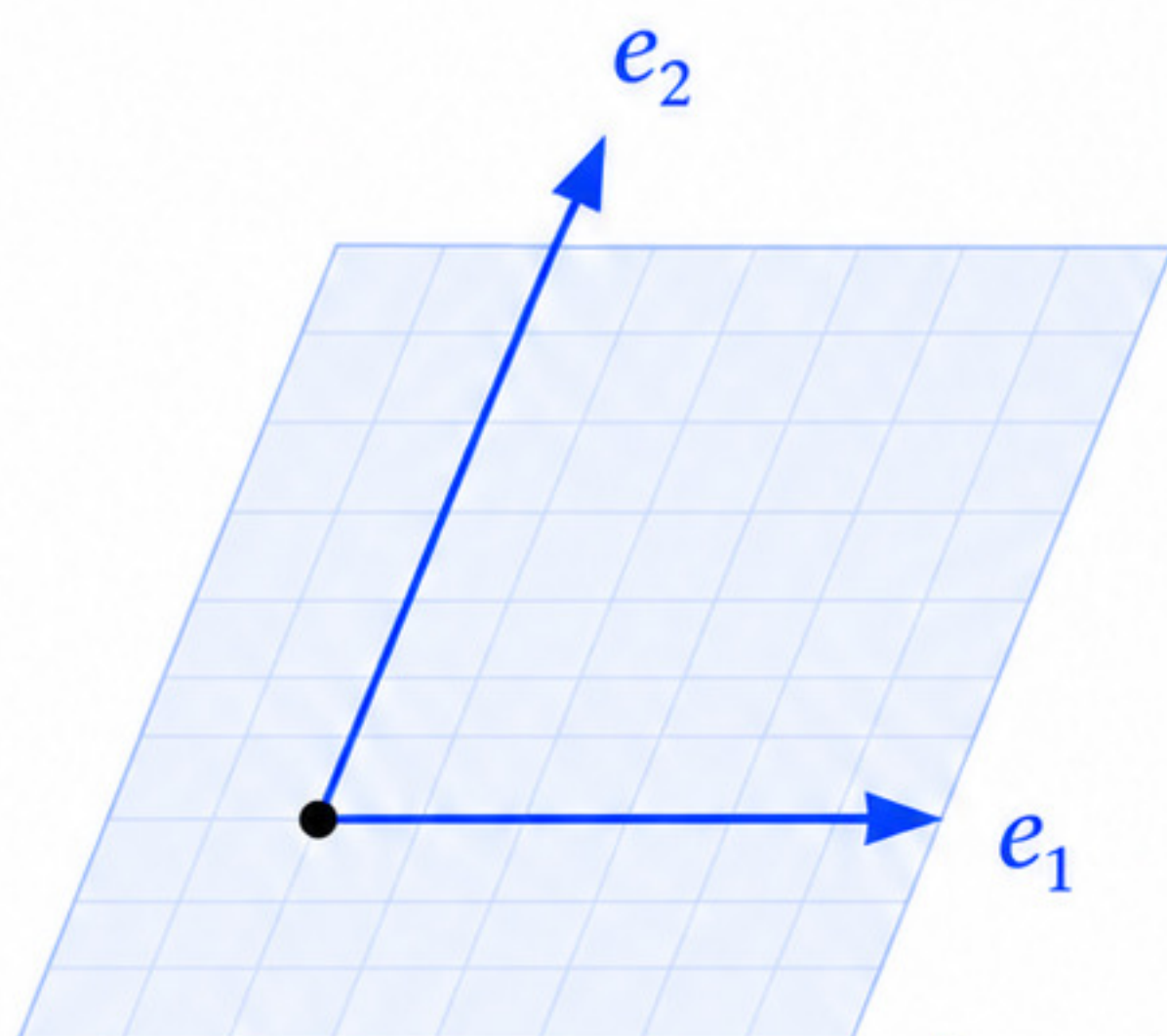


$$\text{checkmark icon}$$

Wynik

Przestrzenie wektorowe

baza, wymiar i rozpiętość liniowa



tu budujemy intuicję

W TYM MODUŁE

- 1 Pojęcie przestrzeni wektorowej
- 2 Podprzestrzeń wektorowa
- 3 Rozpiętość liniowa
- 4 Liniowa niezależność
- 5 Baza przestrzeni
- 6 Wymiar i współrzędne względem bazy

Pojęcie przestrzeni wektorowej



— 1. Idea.

Przestrzeń wektorowa to zbiór obiektów, na którym możemy dodawać wektory i mnożyć je przez skalary, a wynik zawsze pozostaje w tym samym zbiorze.

Przestrzeń wektorowa musi być zamknięta na dodawanie i mnożenie przez skalar.



— 2. Przykłady.

$$\mathbb{R}^2$$

Para liczb rzeczywistych (x, y) .

Dodajemy współrzędne, mnożymy przez skalar.

$$\mathbb{R}^3$$

Trójki liczb rzeczywistych (x, y, z) .

Dodajemy współrzędne, mnożymy przez skalar.

$$P_2$$

Wielomiany stopnia co najwyżej 2.

Dodajemy wielomiany, mnożymy przez skalar.



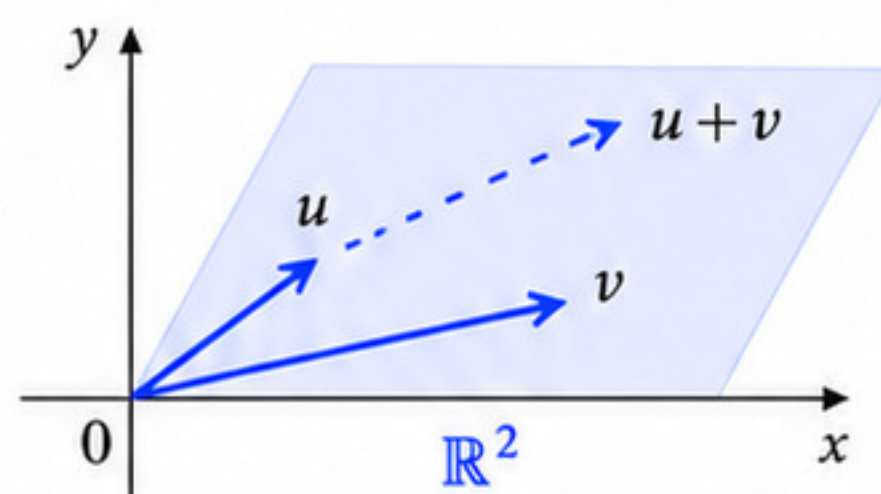
— 3. Najważniejsze własności.

- Zbiór zawiera wektor zerowy 0 (dodawanie z nim nic nie zmienia).
- Dodawanie wektorów jest łączne i przemienne:
 $(u + v) + w = u + (v + w), \quad u + v = v + u.$
- Mnożenie przez skalar działa tak, jak oczekujemy:
 $a(u + v) = au + av, \quad (ab)u = a(bu), \quad 1 \cdot u = u.$



— 4. Intuicja na płaszczyźnie.

W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ wektory to strzałki na płaszczyźnie. Dodajemy je metodą równoległoboku, a mnożenie przez skalar wydłuża lub skraca oraz ewentualnie odwraca kierunek.



Najważniejsza intuicja: możemy wykonywać typowe działania wektorowe i nie opuszczamy zbioru.

Podprzestrzeń wektorowa

Zbiór W jest **podprzestrzenią**, jeśli:



- ① zawiera wektor zerowy,
- ② jest zamknięty na dodawanie,
- ③ jest zamknięty na mnożenie przez skalar.



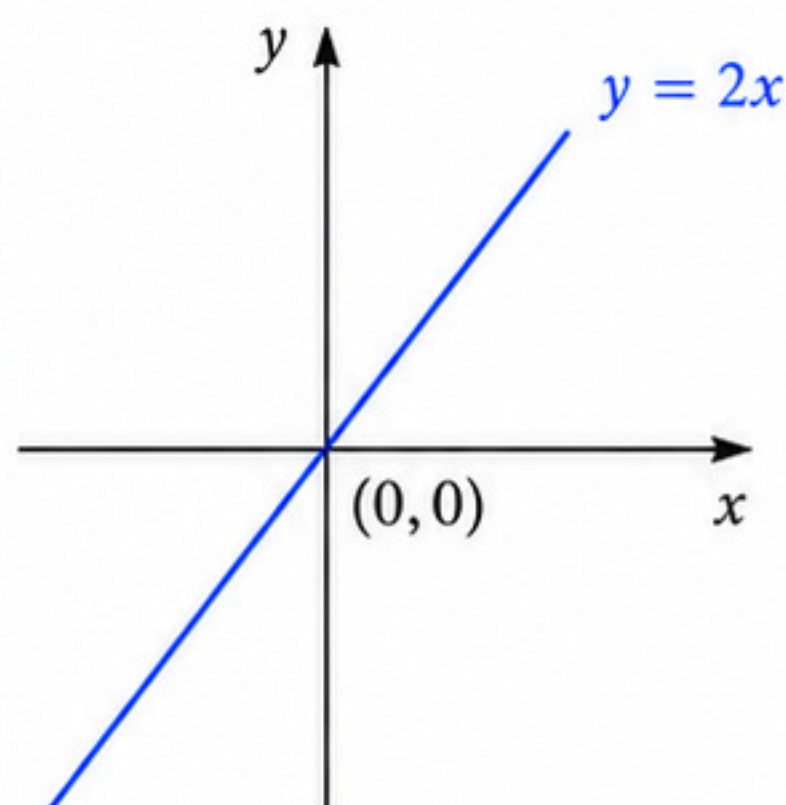
Przykład pozytywny.

Niech $W = \{(x, y) : y = 2x\} \subset \mathbb{R}^2$

To prosta przechodząca przez początek układu.

- Zawiera wektor zerowy: $(0, 0) \in W$.
- Zamknięcie na dodawanie:
jeśli $u = (x_1, 2x_1)$, $v = (x_2, 2x_2) \in W$,
to $u + v = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)) \in W$.
- Zamknięcie na mnożenie przez skalar:
jeśli $u = (x, 2x) \in W$ oraz $k \in \mathbb{R}$,
to $ku = (kx, 2kx) = (kx, 2(kx)) \in W$.

Zatem W jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$.



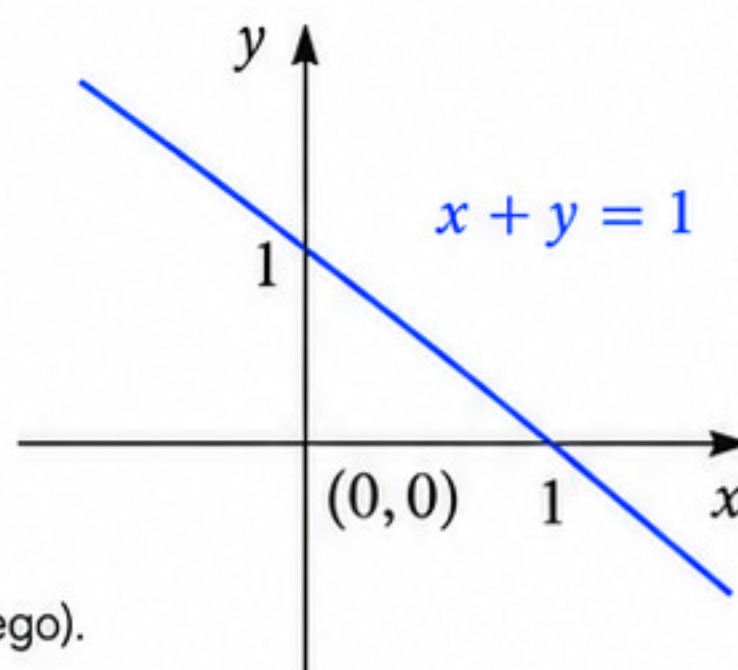
Przykład negatywny.

Niech $S = \{(x, y) : x + y = 1\} \subset \mathbb{R}^2$

To prosta równoległa do $y = -x$, ale nieprzechodząca przez początek układu.

Sprawdzamy wektor zerowy: $(0, 0) \notin S$, ponieważ $0 + 0 = 0 \neq 1$.

Zatem S to nie jest podprzestrzeń $\mathbb{R}^2$ (nie zawiera wektora zerowego).



Przechodzenie przez punkt $(0, 0)$ jest konieczne,
ale samo nie wystarcza — trzeba jeszcze sprawdzić domknięcie.

Rozpiętość liniowa



— 1. Idea.

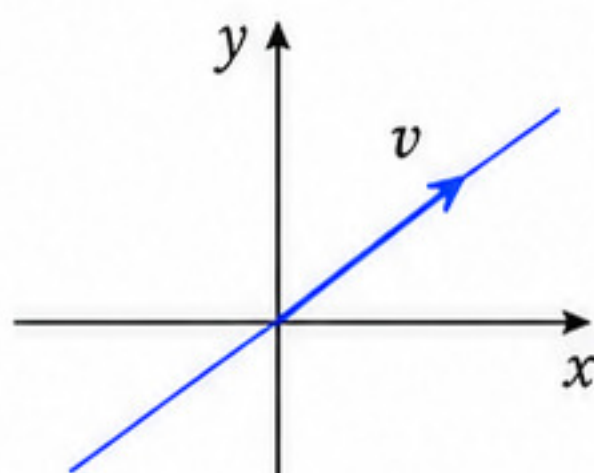
Rozpiętość liniowa zbioru wektorów to zbiór wszystkich ich kombinacji liniowych.

$$\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k : a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}$$



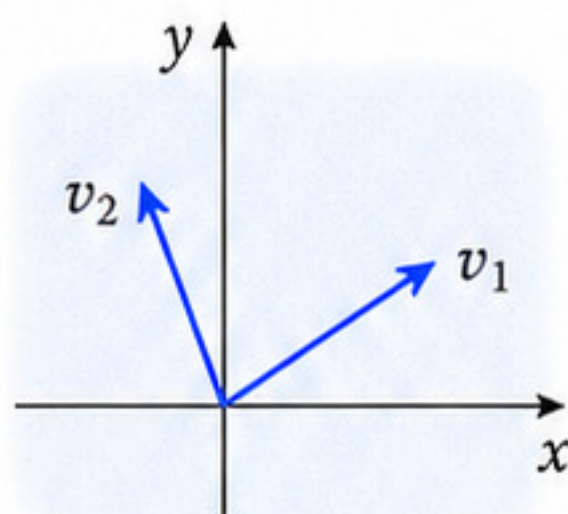
— 2. Przykłady.

- ① Jeden wektor niezerowy rozpiętość to prosta.



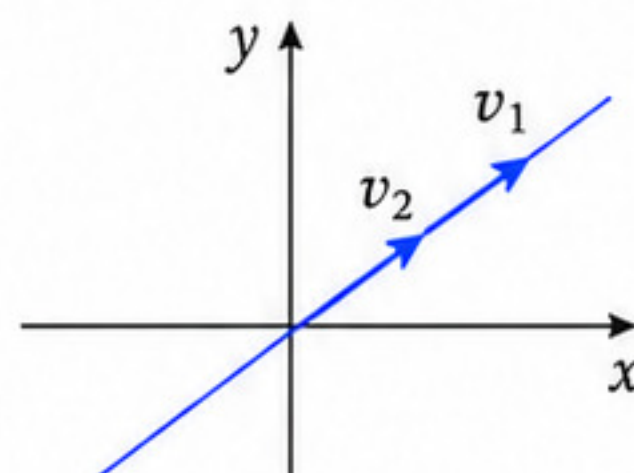
$$\text{span}(v) = \{\text{wszystkie wielokrotności } v\}$$

- ② Dwa liniowo niezależne wektory w $\mathbb{R}^2$ rozpinają całą płaszczyznę.



$$\text{span}(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$$

- ③ Dwa liniowo zależne wektory rozpiętość to tylko jedna prosta.



$$\text{span}(v_1, v_2) = \{\text{wszystkie wielokrotności } v_1\}$$



— 3. Przykład.

Pokażemy, że $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$.

Niech $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ będzie dowolny. Wtedy

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ponieważ (x, y) był dowolny, otrzymujemy

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$



Wniosek. Rozpiętość mówi, jakie kierunki możemy zbudować z danych wektorów.

Liniowa niezależność

„czy każdy wektor wnosi coś nowego?”



— 1. Idea.

Wektory są liniowo niezależne, jeśli żaden z nich nie może zostać utworzony z pozostałych za pomocą kombinacji liniowej.

Każdy wektor wnosi nowy, potrzebny kierunek.

Wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ są liniowo niezależne, jeśli równanie

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

ma tylko rozwiązanie

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$$



— 2. Przykład 1 — niezależne

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a = 0, b = 0.$$

Wektory są liniowo niezależne.



— 3. Przykład 2 — zależne

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$$

$$2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{0}.$$

Współczynniki 2 i -1 nie są jednocześnie zerowe.

Wektory są liniowo zależne.



— 4. Szybki test z macierzą

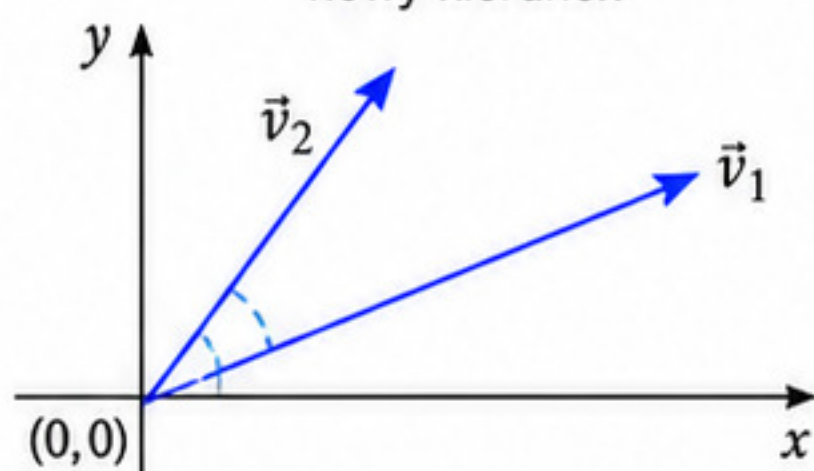
Wektory można wpisać jako kolumny macierzy:

$$A = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \dots \quad \vec{v}_k].$$

Jeżeli każda kolumna zawiera pivot, kolumny są liniowo niezależne.

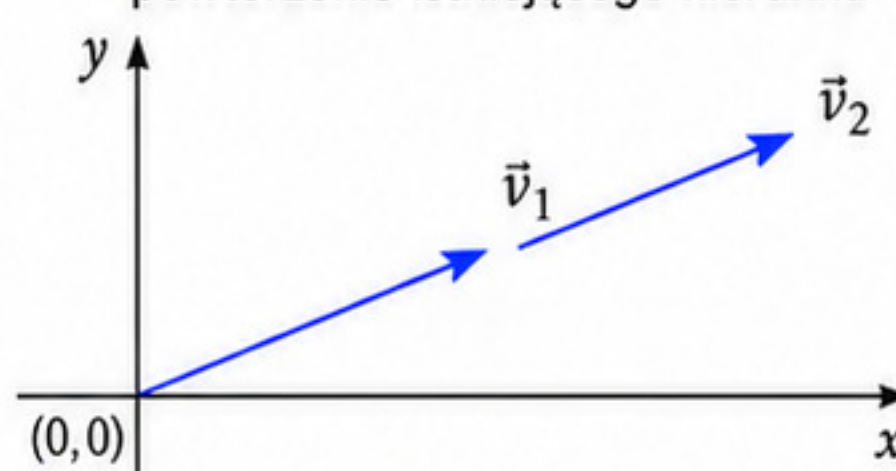
Liniowo niezależne

nowy kierunek



Liniowo zależne

powtórzenie istniejącego kierunku



Zależność liniowa oznacza nadmiar informacji.
Niezależność oznacza brak zbędnych wektorów.

Baza

„minimalny zestaw, który generuje całą przestrzeń”



— 1. Idea.

Baza przestrzeni to zbiór wektorów, który spełnia dwa warunki:

1. Generuje całą przestrzeń
 $\text{span}(v_1, \dots, v_k) = V$

2. Wektory są liniowo niezależne
 Żaden z nich nie jest zbędny.



BAZA = GENERUJE + NIE MA NADMIARU



— 2. Standardowa baza $\mathbb{R}^2$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x e_1 + y e_2$$

$\{e_1, e_2\}$ jest bazą $\mathbb{R}^2$.



— 3. Baza nie musi być standardowa

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Wektory nie są proporcjonalne,
 więc są liniowo niezależne.

Dwa niezależne wektory w $\mathbb{R}^2$
 generują całą płaszczyznę.



— 4. Przykład zbioru, który nie jest bazą

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zbiór jest liniowo zależny
 i nie jest bazą.

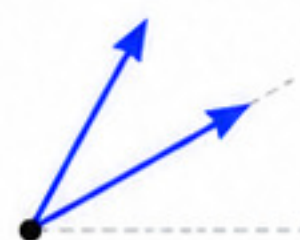
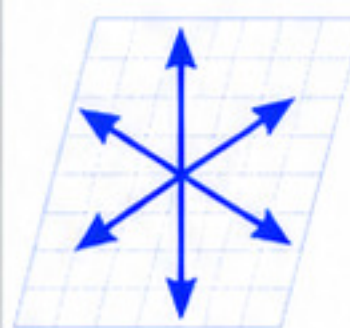
rozpiętość
całej
przestrzeni

+

liniowa
niezależność



BAZA



minimalny
zestaw
kierunków,
który generuje
całą przestrzeń
bez nadmiaru.



Kluczowa intuicja: Baza to najmniejszy kompletny zestaw kierunków
 potrzebny do opisanie całej przestrzeni.

Wymiar

ile niezależnych kierunków potrzebujemy?



1. Czym jest wymiar?

$$\dim(V) = n$$

Jeśli baza przestrzeni V zawiera n wektorów, to $\dim(V) = n$.



2. Przykłady

① $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$,
bo baza standardowa ma
dwa wektory e_1, e_2 .

② $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$,
bo potrzebujemy trzech
niezależnych kierunków.



3. Połączenie z rangiem

rzęd macierzy = liczba niezależnych kierunków

Jeśli kolumny macierzy generują pewną podprzestrzeń, to liczba liniowo niezależnych kolumn jest równa wymiarowi tej podprzestrzeni.



4. Współrzędne zależą od bazy

Baza standardowa

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Inna baza

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$a + b = 3$$

$$a - b = 2$$

$$\frac{a + b = 3}{a - b = 2} \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

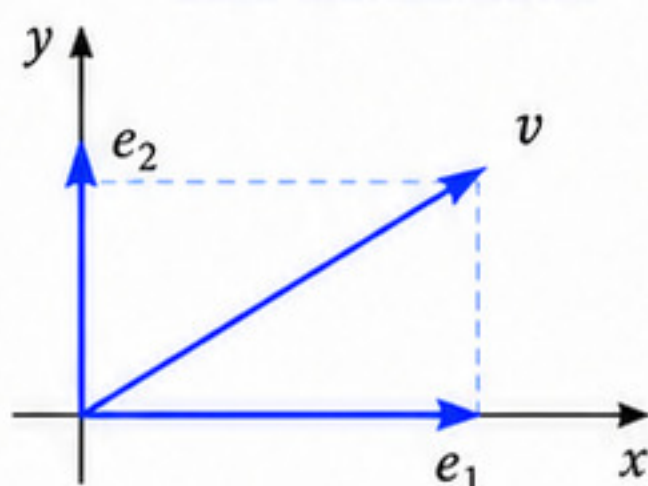
$$b = \frac{1}{2}$$

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

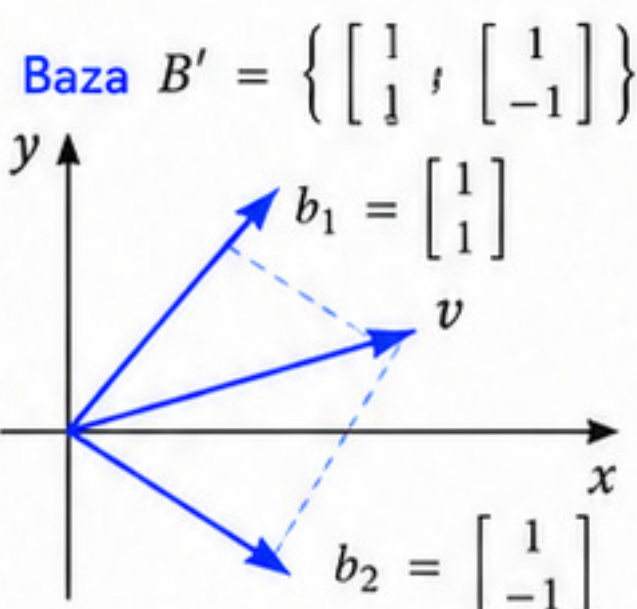


5. Idea wizualna

Baza standardowa



Ten sam obiekt —
inne współrzędne.



Zapamiętaj: Wymiar przestrzeni jest stały, ale bazę można wybrać na wiele sposobów.

MODUŁ 06

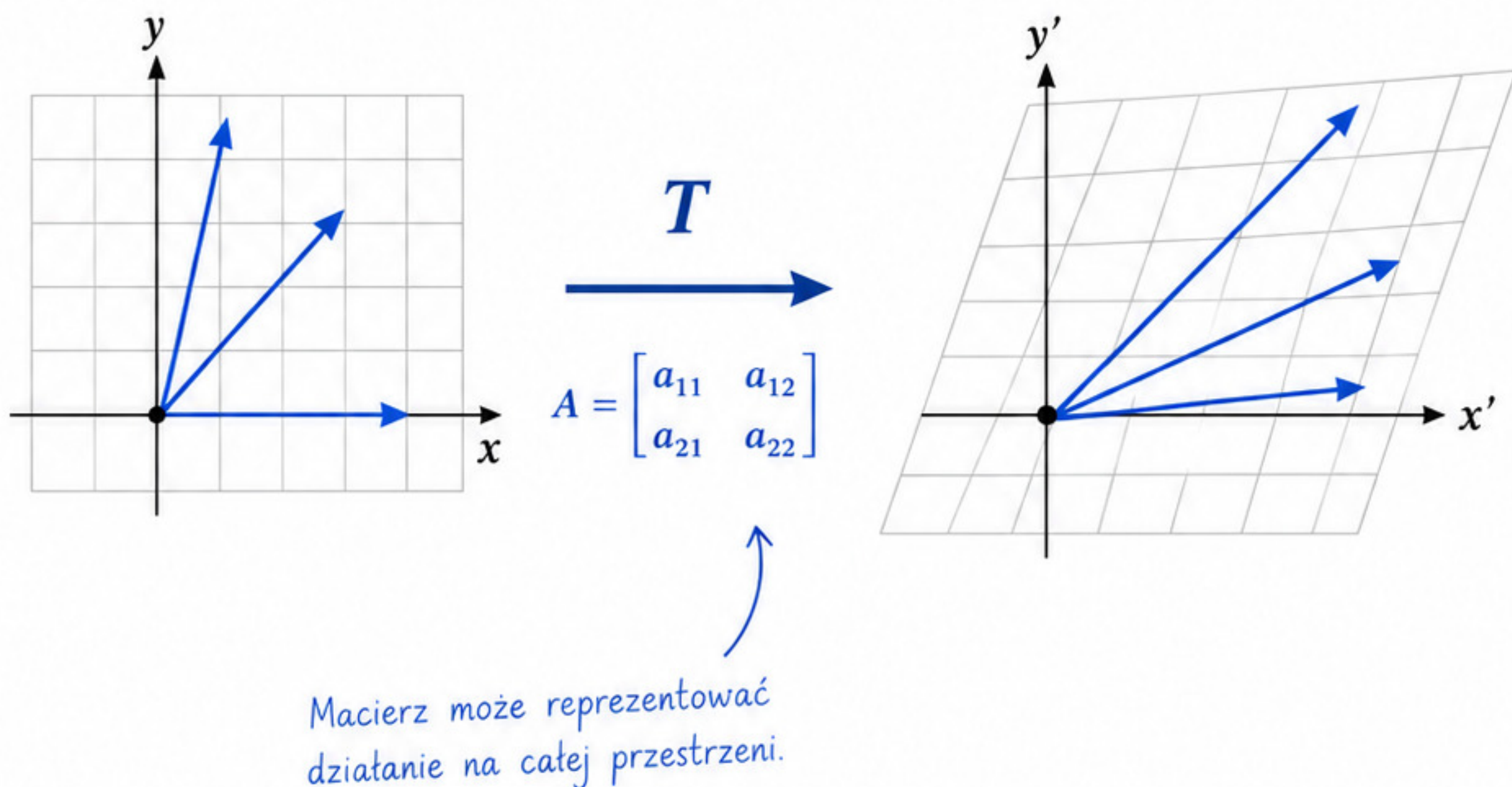
PRZEKSZTAŁCENIA I WARTOŚCI WŁASNE

Macierze jako operacje, które zmieniają przestrzeń i jej wektory.



Po tym module będziesz potrafić:

- rozumieć pojęcie przekształcenia liniowego;
- interpretować macierz przekształcenia;
- rozumieć jądro i obraz;
- wyznaczać podstawowe wartości własne;
- interpretować wektory własne.



Przekształcenie liniowe

funkcja działająca na wektorach

Przekształcenie liniowe bierze wektor v i zamienia go na inny wektor $T(v)$, zachowując strukturę dodawania i mnożenia przez skalar.

$$T : V \rightarrow W$$



— 1. Dwa warunki liniowości

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

$$T(kv) = kT(v)$$



— 2. Natychmiastowa konsekwencja

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Jeżeli funkcja przesuwa początek układu w inne miejsce, nie jest przekształceniem liniowym.

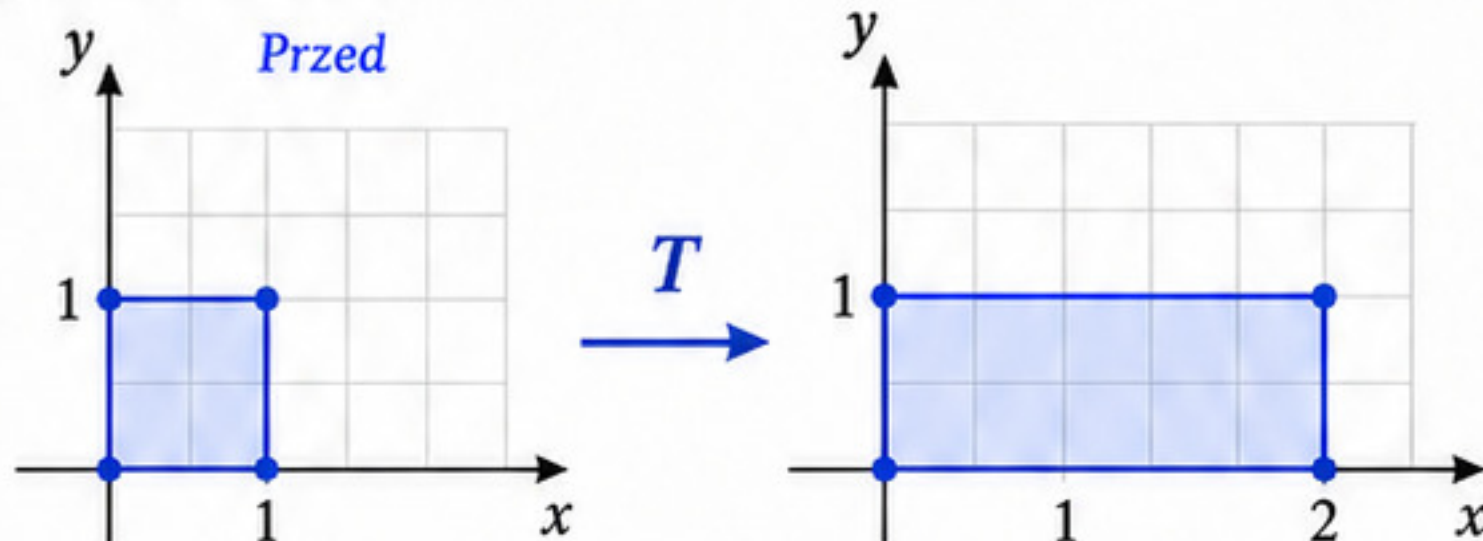


— 3. Przykład liniowego przekształcenia

$$T(x, y) = (2x, y)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Transformacja rozciąga przestrzeń dwukrotnie w kierunku osi x .



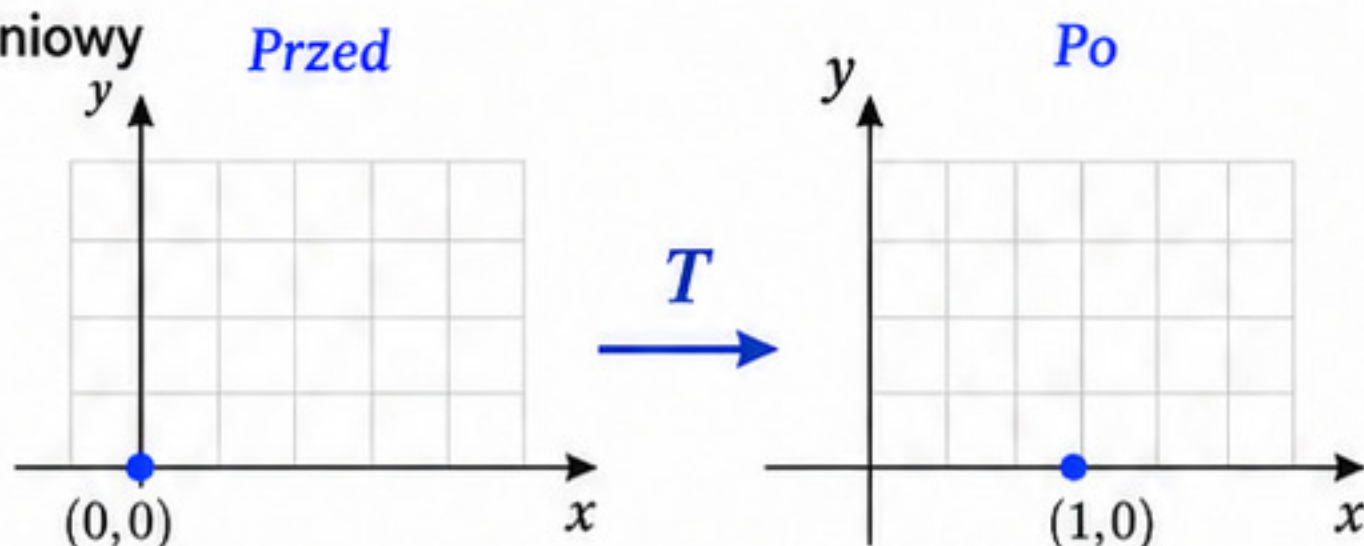
— 4. Przykład, który nie jest liniowy

$$T(x, y) = (x + 1, y)$$

$$T(0, 0) = (1, 0)$$

$$\text{zatem } T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$$

To przesunięcie nie jest przekształceniem liniowym.



Intuicja: Przekształcenia liniowe mogą obracać, skalować, odbijać lub ścinać przestrzeń, ale nie mogą dowolnie przesuwać jej początku.

Jak macierz wykonuje przekształcenie?



— 1. Idea

W przestrzeniach skończone wymiarowe przekształcenie liniowe można reprezentować za pomocą macierzy.

$$T(x) = Ax$$



— 2. Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad T(v) = Av = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Transformacja podwoiła pierwszą współrzędną, ale pozostawiła drugą bez zmian.



— 3. Skąd biorą się kolumny macierzy?

Dla standardowej bazy kolumny macierzy są obrazami wektorów bazowych.

$$A = [T(e_1) \quad T(e_2)]$$



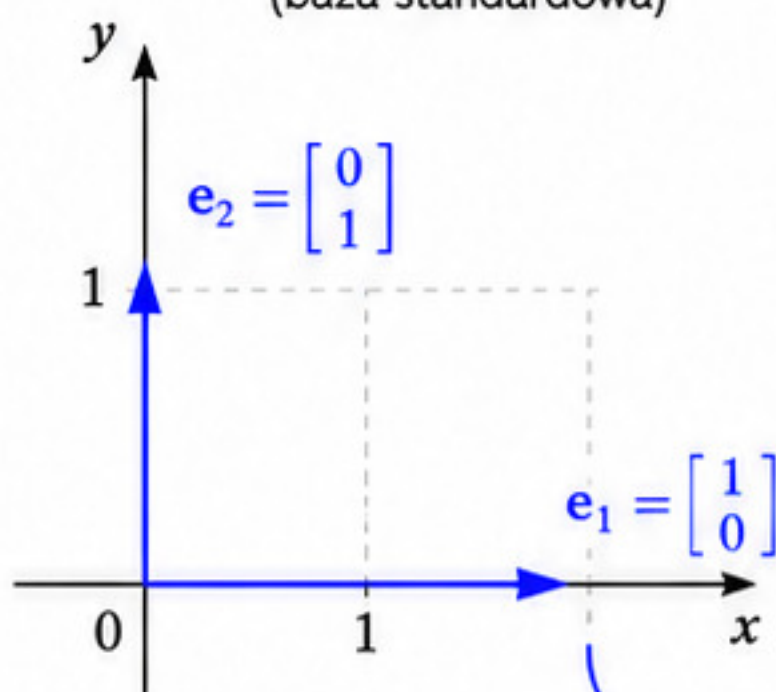
— 4. Przykład

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad T(e_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

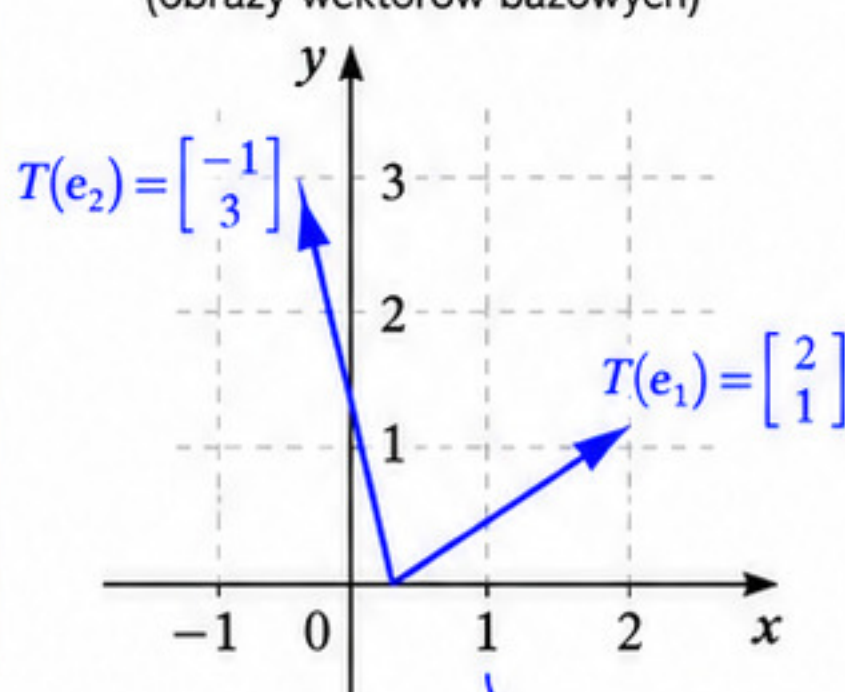


— 5. Wizualizacja

Przed przekształceniem
(baza standardowa)



Po przekształceniu
(obrazy wektorów bazowych)



Kolumny macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Arrows point from the columns of matrix A to the transformed vectors:

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad T(e_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Bardzo ważna intuicja: Znając działanie przekształcenia na wektory bazy, znamy jego działanie na każdy wektor przestrzeni.

JĄDRO I OBRAZ

co znika, a co można otrzymać?



1. Jądro

Jądro przekształcenia T to zbiór wszystkich wektorów, które są odwzorowane w wektor zerowy.

$$\ker(T) = \{x : T(x) = 0\}$$

Jeśli $T(x) = Ax$, to szukanie jądra oznacza rozwiązanie $Ax = 0$.

Przykład: Znajdź jądro macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x + 2y = 0$$

$$x = -2y$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\ker(A) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$



2. Obraz

Obraz przekształcenia T to zbiór wszystkich wektorów, które można otrzymać jako $T(x)$.

$$\text{Im}(T) = \{T(x) : x \in V\}$$

Dla macierzy obraz jest przestrzenią generowaną przez jej kolumny.

$$\text{Im}(A) = \text{span}(\text{kolumny } A)$$



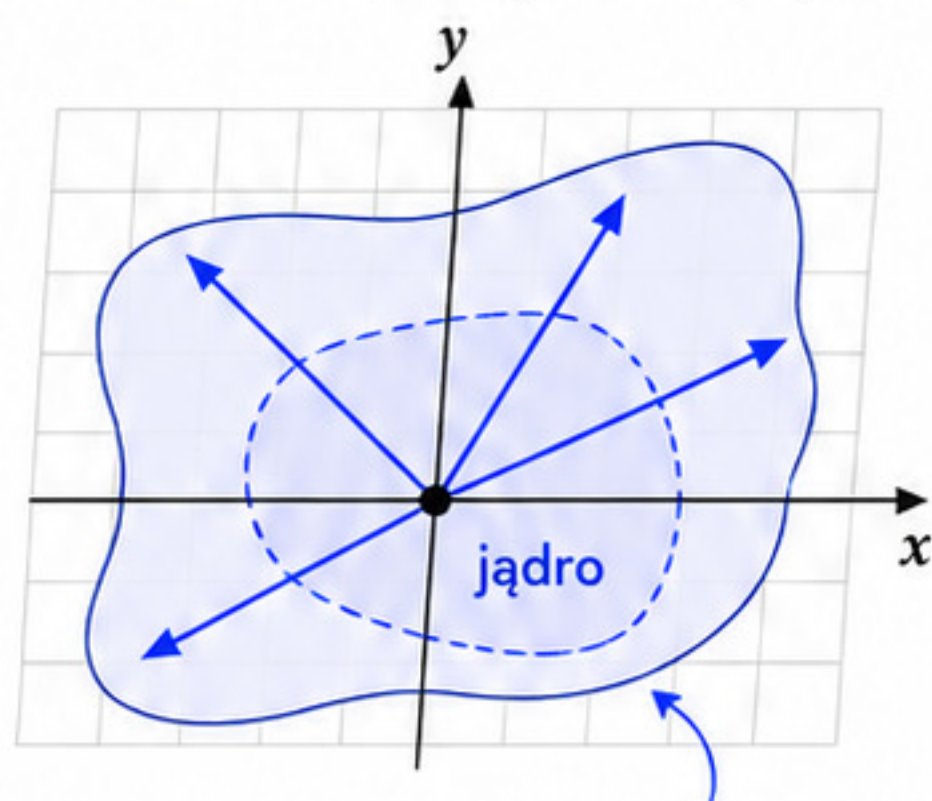
3. Połączenie z rangiem

Wymiar obrazu to ranga macierzy.

$$\dim(\text{Im}(A)) = r(A)$$

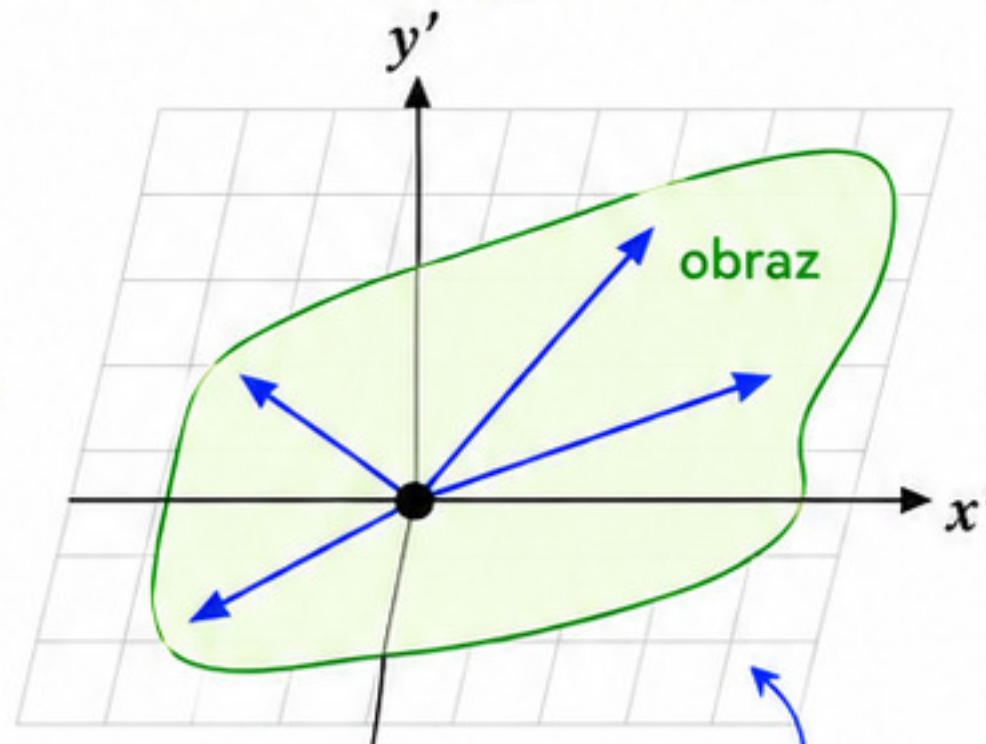
Ranga mówi, ile niezależnych kierunków może osiągnąć przekształcenie.

Przestrzeń wejściowa (V)



Wszystkie wektory z jądra są odwzorowywane w 0.

Przestrzeń wyjściowa (W)



Tylko wektory z obrazu można otrzymać.

T
 $T : V \rightarrow W$



Jądro: Które wektory znikają?

Obraz: Które wektory można otrzymać?

Wartości własne

specjalne liczby ukryte w macierzy

Są szczególne wektory, których kierunek po działaniu macierzy pozostaje niezmienny.



$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Liczba λ to wartość własna.

Intuicyjnie:

- $\lambda > 1$ — wektor się wydłuża
- $0 < \lambda < 1$ — skraca się
- $\lambda < 0$ — zmienia również zwrot
- $\lambda = 0$ — trafia do zera



Jak znaleźć wartości własne?

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$



$$\det(A - \lambda I) = 0$$

← równanie charakterystyczne



Przykład

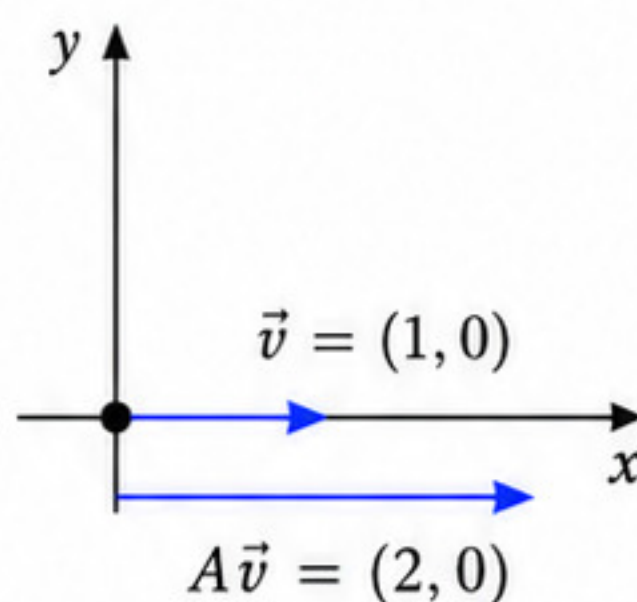
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

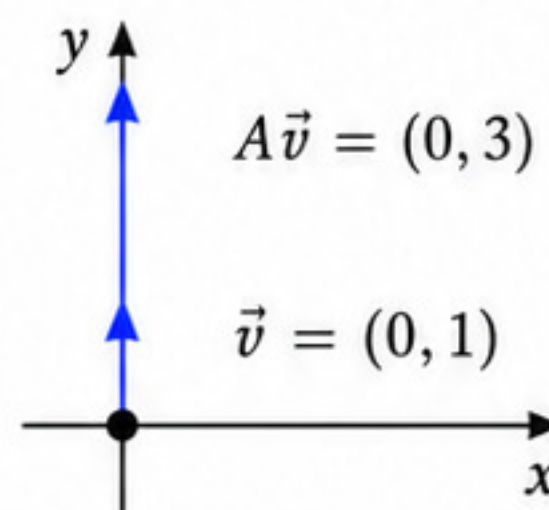
$$(2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 3$$

Kierunek osi x
(skalowanie $\times 2$)



Kierunek osi y
(skalowanie $\times 3$)



Szczególne kierunki
→ tylko skalowanie.



Zapamiętaj: Wartość własna nie jest wektorem.

To liczba opisująca, jak mocno przekształcenie skaluje odpowiedni wektor własny.

Wektory własne

kierunki, które przekształcenie zachowuje



1. Definicja

Niezerowy wektor $\vec{v}$ jest wektorem własnym macierzy A , jeśli dla pewnej wartości własnej λ zachodzi

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$



2. Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Mamy wartości własne $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

• 3. Dla $\lambda = 2$

$$(A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = 0$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wektory własne są wielokrotnościami $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

• 4. Dla $\lambda = 3$

$$(A - 3I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = 0$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$$

Wektory własne są wielokrotnościami $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

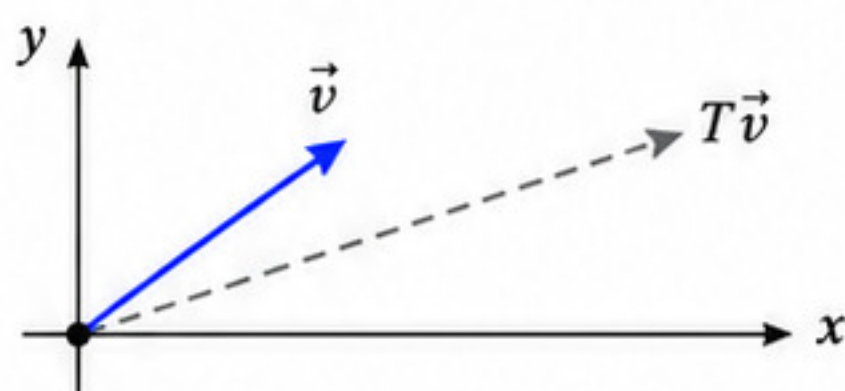


5. Szybka weryfikacja $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

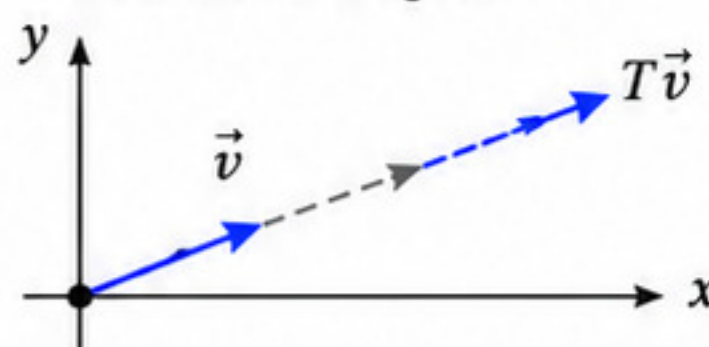


6. Co dzieje się z wektorami?

Zwykły wektor zmienia kierunek.



Wektor własny pozostaje na tej samej prostej, ale zmienia długość.



- wydłużyć się
- skrócić się
- odwrócić zwrot, ale pozostaje na tej samej prostej



7. Procedura

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

znajdź λ

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

znajdź wektory własne

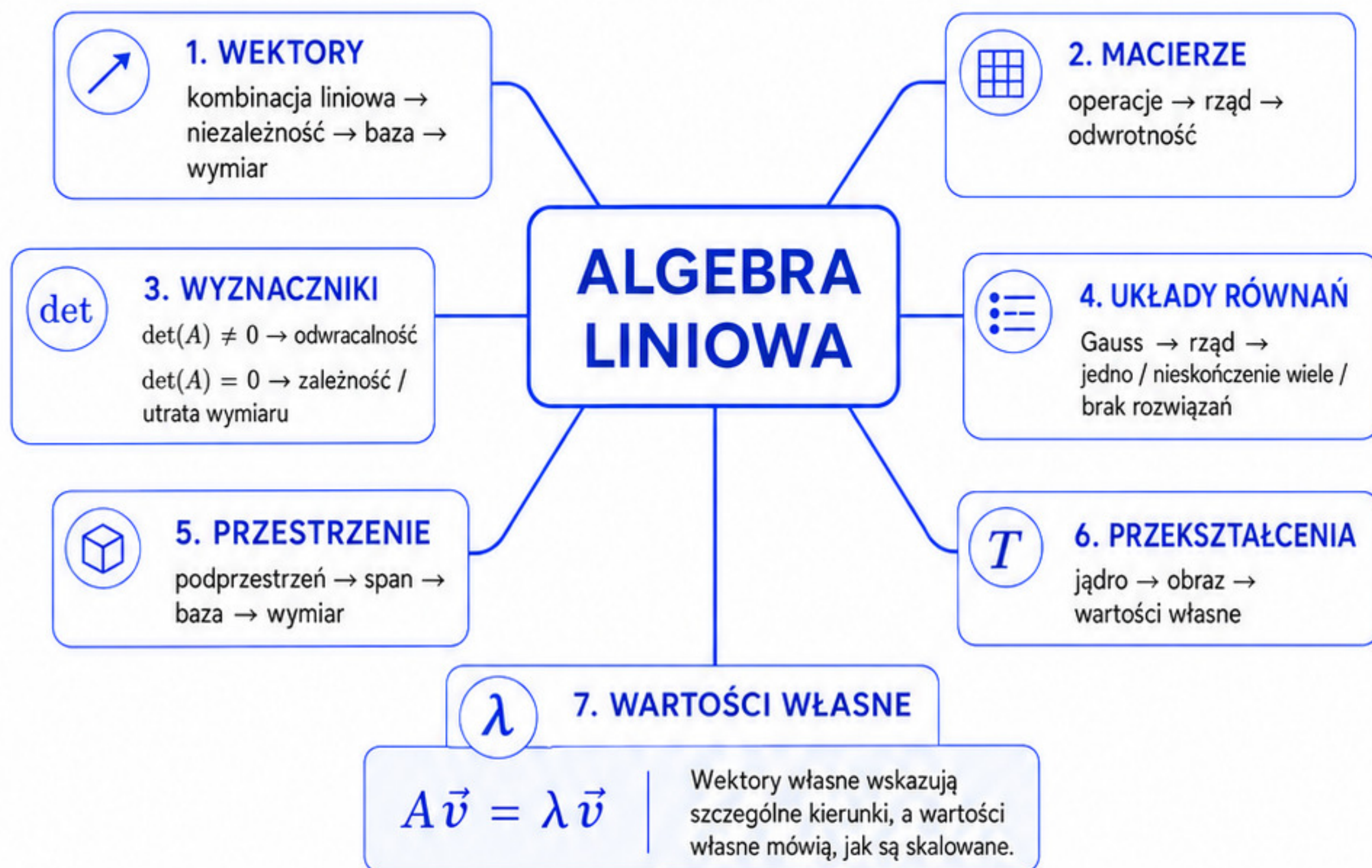


Uwaga: Wektor zerowy nigdy nie jest wektorem własnym.

Algebra liniowa

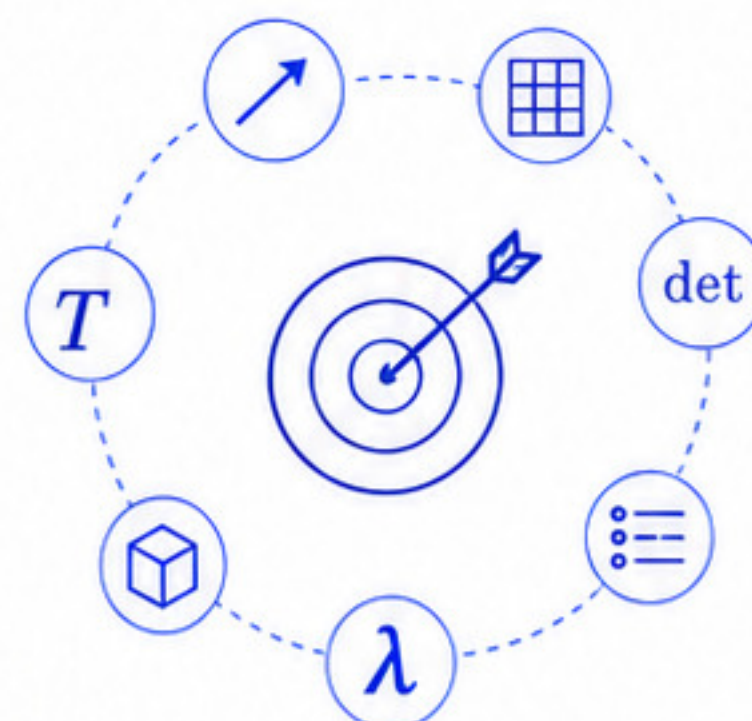
jedna mapa, wiele połączeń

Nie uczysz się osobnych tematów. Uczysz się jednego systemu.



7 pytań przed egzaminem

- 1 Czy potrafię określić wymiary macierzy i wykonać podstawowe działania?
- 2 Czy potrafię policzyć wyznacznik i zinterpretować wynik 0 lub $\neq 0$?
- 3 Czy potrafię zredukować macierz metodą Gaussa?
- 4 Czy potrafię określić liczbę rozwiązań układu?
- 5 Czy rozumiem różnicę między rozpiętością, niezależnością i bazą?
- 6 Czy potrafię wyjaśnić, co robi przekształcenie liniowe?
- 7 Czy rozumiem znaczenie równania $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$?



Największy postęp pojawia się wtedy, gdy zaczynasz zauważać, że niezależność, wymiar, rząd, odwracalność i liczba rozwiązań są ze sobą głęboko powiązane.