

$$\int u dv$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

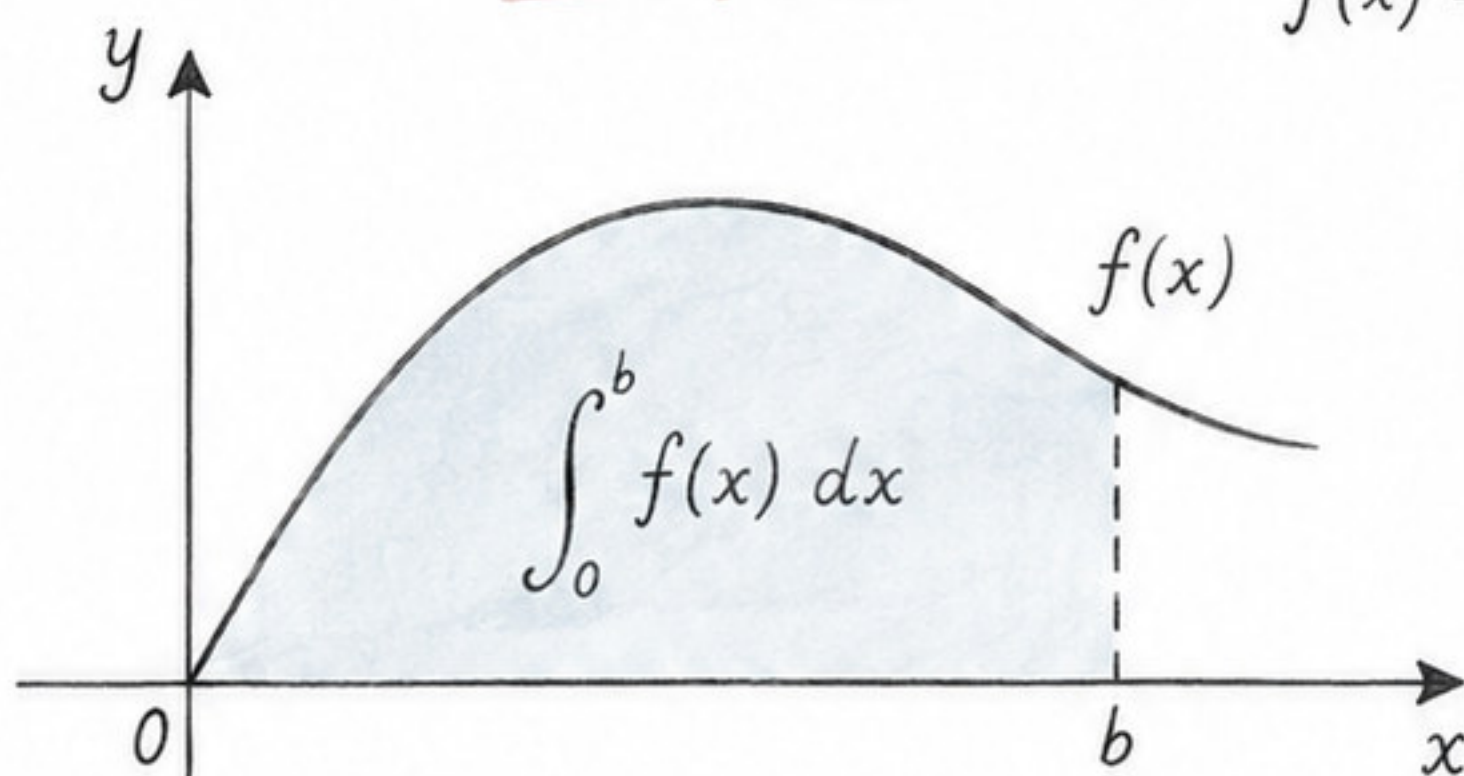
PODSUMOWANIA Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ 2

Całki • szeregi • kryteria zbieżności • szereg Taylora

$$R = \frac{1}{L}$$

Najważniejsze wzory, strategie i przykłady
krok po kroku — bez szukania odpowiedzi
w setkach stron.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$



$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Informacja o materiale

PODSUMOWANIA Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ 2

© 2026. Wszelkie prawa zastrzeżone.

Niniejszy materiał został przygotowany jako pomoc w nauce i powtórkach z Analizy Matematycznej 2.

Materiał nie zastępuje wykładów, ćwiczeń, oficjalnego programu przedmiotu ani literatury wskazanej przez prowadzącego.

Przedstawione metody, wzory i przykłady mają pomóc w zrozumieniu sposobu rozwiązywania typowych zadań. Zakres oraz oznaczenia stosowane na poszczególnych uczelniach mogą się różnić.

Zabrania się kopiowania, rozpowszechniania, odsprzedaży oraz publicznego udostępniania całości lub części materiału bez odpowiedniego zezwolenia właściciela praw.

Spis treści

START

Informacja o materiale	01
Spis treści	02
Jak korzystać z tych notatek	03

MODUŁ 01 · TECHNIKI CAŁKOWANIA

Start modułu	04
Całkowanie przez części	05
Jak wybrać u i dv ?	06
Całkowanie przez części w całkach oznaczonych	07
Wielokrotne całkowanie przez części	08
Całki trygonometryczne	09
Podstawienia trygonometryczne	10
Rozkład na ułamki proste	11
Podstawienie: szybka powtórka i przypadki mieszane	12
Wzory redukcyjne	13
Zadania mieszane krok po kroku	14
Mapa wyboru metody całkowania	15

MODUŁ 02 · CAŁKI NIEWŁAŚCIWE I ZASTOSOWANIA

Start modułu	16
Przedziały nieskończone	17
Całki z osobliwością	18
Kryteria porównawcze	19
Pole między wykresami	20
Objętość brył	21
Długość łuku	22
Powtórka egzaminacyjna	23

MODUŁ 03 · CIĄGI I SZEREGI

Start modułu	24
Zbieżność ciągów	25
Szereg geometryczny i szereg p	26
Warunek konieczny	27
Kryterium całkowite	28
Kryteria porównawcze	29
Kryterium ilorazowe	30
Kryterium pierwiastkowe	31
Kryterium Leibniza	32
Zbieżność bezwzględna i warunkowa	33
Jak wybrać kryterium?	34
Zadania mieszane	35

MODUŁ 04 · SZEREGI POT

Analiza 2 nie wymaga zgadywania. Potrzebujesz właściwej metody.

Na Analizie Matematycznej 2 problemem często nie jest sam wzór.

Problem brzmi: 'Skąd mam wiedzieć, którego wzoru albo kryterium użyć?'

Dlatego te notatki nie są tylko listą wzorów.

1		CO TO JEST	Krótką definicja bez zbędnego formalizmu.
2		KIEDY TEGO UŻYĆ	Sygnały w zadaniu, które wskazują właściwą metodę.
3		JAK TO ZROBIĆ	Schemat postępowania krok po kroku.
4		PRZYKŁAD	Pełne rozwiązanie typowego zadania.
5		UWAŻAJ	Najczęstszy błąd lub pułapka egzaminacyjna.

Jak się uczyć

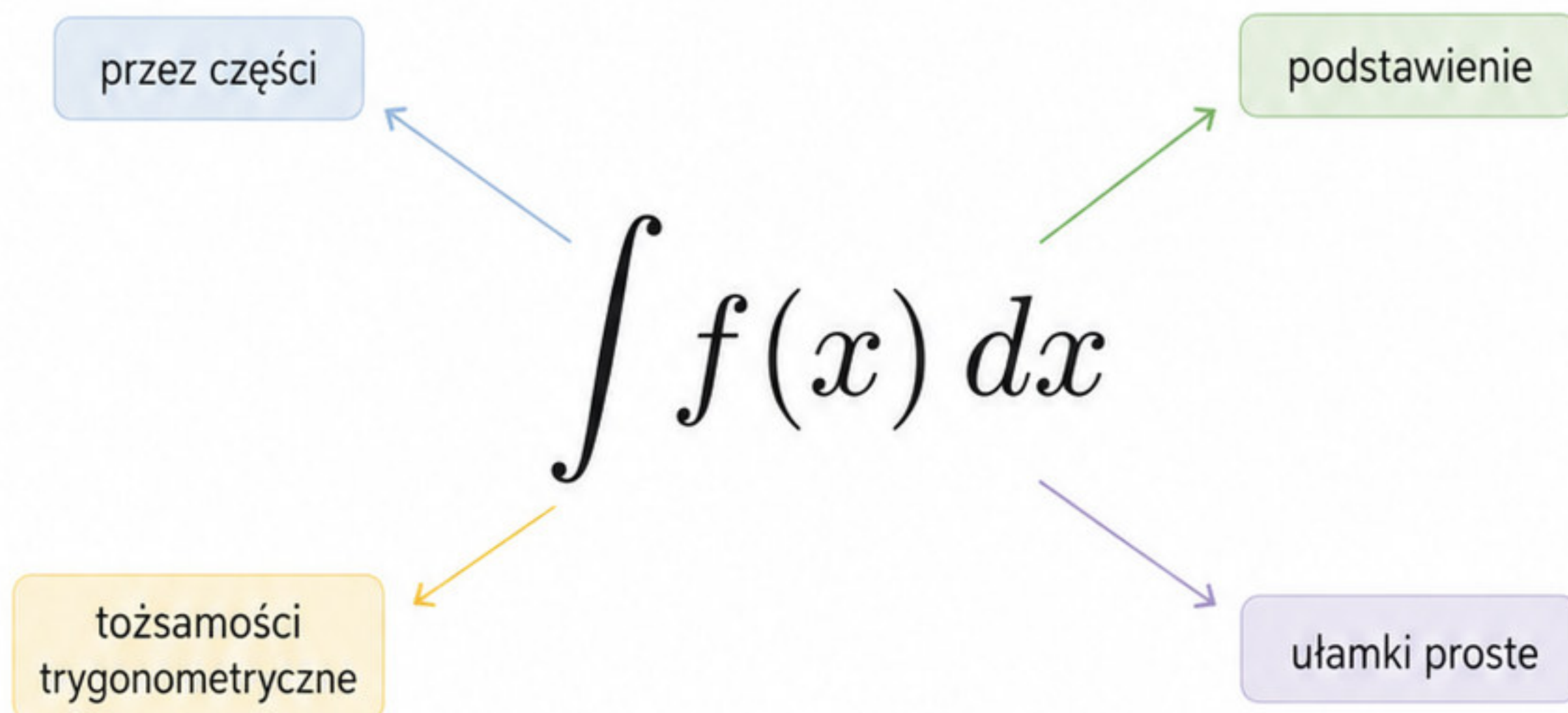
	Pierwsza nauka:	przeczytaj wyjaśnienie → przeanalizuj przykład → zastój rozwiązanie → spróbuj samodziel
---	-----------------	---

TECHNIKI CAŁKOWANIA

Jak rozpoznać właściwą metodę,
zamiast próbować wszystkiego po kolei

Na tym etapie opanujesz:

- całkowanie przez części,
- wybór u oraz dv ,
- całki trygonometryczne,
- podstawienia trygonometryczne,
- ułamki proste,
- przypadki wymagające kilku metod,
- szybkie rozpoznawanie najlepszej strategii.



Najważniejsze pytanie modułu:

Co w tej całce podpowiada mi metodę?

Całkowanie przez części

Gdy iloczyn dwóch funkcji nie daje się łatwo scałkować wprost.

1. Idea w prostych słowach

Całkowanie przez części pozwala zamienić trudną całkę z iloczynu dwóch funkcji na inną, prostszą całkę. Wzór wynika z reguły różniczkowania iloczynu.

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

u – część, którą różniczkujemy,

dv – część, którą całkujemy,

$du = u'(x) \, dx$,

$v = \int dv$.

2. Kiedy warto pomyśleć o tej metodzie?

 $x e^x$
 $x \sin x$
 $x \ln x$
 $\ln x$

Jeśli w całce występuje wielomian pomnożony przez funkcję wykładniczą lub trygonometryczną, całkowanie przez części jest jednym z pierwszych kandydatów.

3. Przykład krok po kroku

Oblicz: $\int x e^x \, dx$

Krok 1 wybieramy $u = x$, $dv = e^x \, dx$

Krok 2 obliczamy $du = dx$ oraz $v = e^x$

Krok 3 podstawiamy do wzoru:

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx$$

Krok 4 kończymy:

$$\int x e^x \, dx = x e$$

Jak wybrać u i dv ?

Dobry wybór upraszcza całkę. Zły może ją jeszcze bardziej skomplikować.

1. NAJWAŻNIEJSZA ZASADA

- wybierając u , zapytaj:
„Czy po zróźniczkowaniu ta część stanie się prostsza?”
- wybierając dv , zapytaj:
„Czy potrafię tę część łatwo scałkować?”

2. REGUŁA POMOCNICZA LIATE

L	— Logarytmiczne	$\ln x, \log x$
I	— Odwrotne trygonometryczne	$\arctan x, \arcsin x$
A	— Algebraiczne	$x, x^2, 3x + 1$
T	— Trygonometryczne	$\sin x, \cos x$
E	— Wykładnicze	$e^x, 2^x$

i Jeśli w iloczynie występują funkcje z różnych grup, zwykle wybieramy jako u funkcję znajdującą się wyżej na liście.

! LIATE to wskazówka, nie twierdzenie. Ostatecznym celem zawsze jest uproszczenie całki.

3. PRZYKŁAD

$$\int x \cos x \, dx$$

x jest funkcją algebraiczną (A), a $\cos x$ — trygonometryczną (T). Zgodnie z LIATE wybieramy $u = x$.

$$u = x$$

$$dv = \cos x \, dx$$

$$du = dx$$

$$v = \sin x$$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

Całkowanie przez części w całkach oznaczonych

Ta sama metoda działa dla całek oznaczonych, ale po utworzeniu iloczynu uv trzeba od razu uwzględnić granice całkowania.

$$\int_a^b u \, dv = [uv]_a^b - \int_a^b v \, du$$
$$[uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

Przykład krok po kroku

Oblicz: $\int_0^1 x e^x \, dx$

Krok 1:

$$u = x, \quad dv = e^x \, dx$$

Krok 2:

$$du = dx, \quad v = e^x$$

Krok 3:

$$\int_0^1 x e^x \, dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx$$

Krok 4:

$$[x e^x]_0^1 = 1 \cdot e - 0 \cdot 1 = e$$

$$\int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

Krok 5:

$$e - (e - 1) = 1$$

Odpowiedź: 1



Pułapka egzaminacyjna

nie zapisuj tylko

$$uv - \int v \, du$$

bez pamiętania o granicach;

w całce oznaczonej wyrażenie

$[uv]_a^b$ musi zostać obliczone dla obu granic.

Gdy trzeba zastosować całkowanie przez części więcej niż raz

Wielomian stopniowo znika, a całka staje się coraz prostsza.



Główna idea

Jeżeli u jest wielomianem wyższego stopnia, jedno zastosowanie wzoru może nie wystarczyć. Typowy przykład: $\int x^2 e^x dx$.

Po pierwszym całkowaniu przez części pojawia się $\int x e^x dx$, czyli kolejna całka wymagająca tej samej metody.



Przykład krok po kroku

$$I = \int x^2 e^x dx$$

1 Pierwsze użycie metody

$$u = x^2, \quad dv = e^x dx$$

$$du = 2x dx, \quad v = e^x$$

Całki trygonometryczne: najpierw rozpoznaj potęgi

W przypadku $\sin^m x \cdot \cos^n x$ parzystość wykładników często wskazuje metodę.

1 Wzory, które trzeba mieć pod ręką

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \left| \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \left| \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \right. \right.$$

2 Schemat wyboru

Przypadek A — nieparzysta potęga sinusa

- zostaw jeden $\sin x$,
- zamień pozostałe $\sin^2 x$ przez $1 - \cos^2 x$,
- potem użyj $u = \cos x$.

Przypadek B — nieparzysta potęga cosinusa

- zostaw jeden $\cos x$,
- użyj $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$,
- potem podstaw $u = \sin x$.

Przypadek C — obie potęgi parzyste

Podstawienia trygonometryczne

Gdy pierwiastek sugeruje trójkąt, wybierz podstawienie, które usuwa pierwiastek.

1 Kiedy stosujemy tę metodę?

Gdy całka zawiera pierwiastki w postaciach:

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \sqrt{a^2 + x^2}, \quad \sqrt{x^2 - a^2},$$

warto rozważyć podstawienie trygonometryczne.

2 Dobór podstawienia

Wyrażenie	Podstawienie	Tożsamość
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta$	$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta$	$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$	$\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$



Idea

Wzory redukcyjne

Zamień całkę z wysoką potęgą na podobną całkę z niższą potęgą.

1 Co to jest wzór redukcyjny?

Wzór redukcyjny pozwala wyrazić całkę I_n przez prostszą całkę, np. I_{n-1} lub I_{n-2} .

$$I_n = \text{prosty składnik} + kI_{n-1} \quad \text{lub} \quad I_n = \text{prosty składnik} + kI_{n-2}$$

2 Klasyczny przykład

Niech $I_n = \int x^n e^x dx$.

Stosujemy całkowanie przez części:

$u = x^n$	$dv = e^x dx$
$du = nx^{n-1} dx$	$v = e^x$

Z narzędzia całkowania przez części $\int u dv = uv - \int v du$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I_n &= x^n e^x - \int e^x \cdot nx^{n-1} dx \\ &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - nI$$

Zadania mieszane: jedna całka, kilka decyzji

Najtrudniejsze zadania rzadko mówią wprost, której metody użyć.



Celem tego etapu jest nauczyć się łączyć kilka technik w jednym rozwiązaniu.

1 Zadanie 1 $\int x^2 \ln x \, dx$

- Rozpoznanie: iloczyn wielomianu i logarytmu.
- Metoda przez części (LIATE):

$u = \ln x$	$dv = x^2 \, dx$
$du = \frac{1}{x} \, dx$	$v = \frac{x^3}{3}$

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x \, dx &= \left(\frac{x^3}{3}\right) \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3}\right) \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3}\right) \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C \\ &= \left(\frac{x^3}{3}\right) \ln x - \frac{x^3}{9} + C \end{aligned}$$

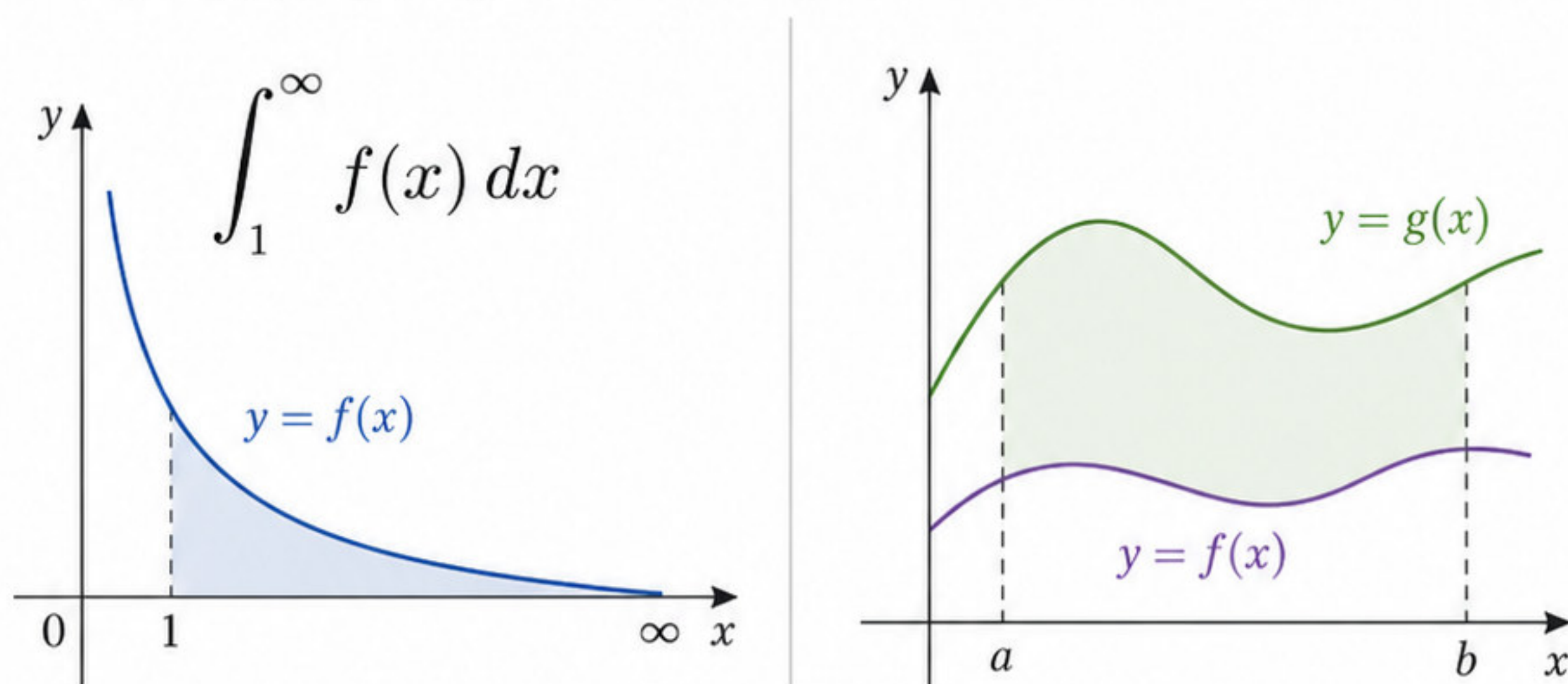
$$\rightarrow \left(\frac{x^3$$

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE I ZASTOSOWANIA CAŁEK

Kiedy zwykła całka ma nieskończoną granicę, problematyczny punkt albo opisuje realną wielkość geometryczną

W tym module opanujesz:

- całki na przedziałach nieskończonych,
- osobliwości wewnątrz lub na końcu przedziału,
- zbieżność i rozbieżność całek,
- kryteria porównawcze,
- pola obszarów,
- objętości brył,
- długość łuku,
- interpretację geometryczną wyniku.



**Najpierw ustal,
czy całka istnieje.
Dopiero potem licz.**

Całki niewłaściwe z osobliwością

Jeśli funkcja „wybucha” w punkcie przedziału, dzielimy problem i używamy granic.

1 Co to jest osobliwość?

Osobliwość to punkt, w którym funkcja nie jest określona lub nieograniczenie rośnie.

Przykład: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ w pobliżu $x = 0$

Funkcja dąży do $+\infty$ gdy $x \rightarrow 0^+$, więc całka

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ jest niewłaściwa.

2 Definicja dla osobliwości na końcu przedziału

Jeśli funkcja ma osobliwość w lewym końcu a :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

Jeśli funkcja ma osobliwość w prawym końcu b :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

3 Przykład

Oblic

Całki niewłaściwe z nieskończoną granicą

Symbol ∞ nie jest liczbą. Dlatego używamy granicy.

1 Definicja

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Jeśli granica po prawej stronie istnieje i jest skończona, to całka niewłaściwa jest **zbieżna**.

Jeśli granica nie istnieje lub jest równa ∞ , to całka niewłaściwa jest **rozbieżna**.

2 Przykład zbieżny

Zbadajmy całkę $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Całka jest **zbieżna** i $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$.

3 Przykład rozbieżny

CIĄGI I SZEREGI LICZBOWE

Nie pytamy tylko „ile wynosi?”. Najpierw pytamy: „czy to w ogóle ma granicę?”



Cel modułu: Nauczyć rozpoznawać zbieżność ciągów i szeregów oraz świadomie wybierać właściwe kryterium zbieżności.

W tym module opanujesz:

- granice ciągów;
- szeregi geometryczne;
- szeregi p ;
- warunek konieczny zbieżności;
- kryterium całkowite;
- kryteria porównawcze;
- kryterium ilorazowe;
- kryterium pierwiastkowe;
- szeregi naprzemienne;
- zbieżność bezwzględną i warunkową;
- wybór właściwego kryterium.

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$



ciąg

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

SZEREGI POTĘGOWE I SZEREG TAYLORA

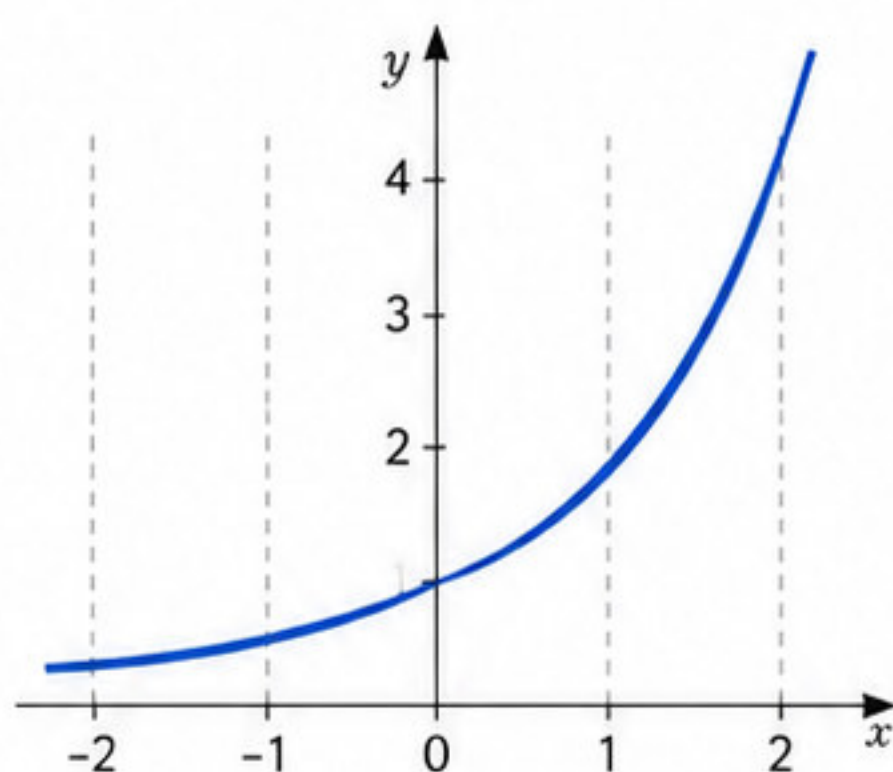
Jak zamienić funkcję na nieskończony wielomian i określić, gdzie to przybliżenie działa



Cel modułu: Nauczyć rozumieć szeregi potęgowe, wyznaczać ich promień i przedział zbieżności oraz budować rozwinięcia Taylora i Maclaurina.

Funkcja

$$y = e^x$$



W tym module opanujesz:

- strukturę szeregu potęgowego,
- promień zbieżności,
- przedział zbieżności,
- badanie końców przedziału,
- szereg Taylora,
- szereg Maclaurina,
- najważniejsze rozwinięcia funkcji,
- wielomiany Taylora,
- działania na szeregach,
- przybliżenia i oszacowanie błędu.

Szereg potęgowy

To nieskończony wielomian zbudowany wokół wybranego punktu.

1 Postać ogólna

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$$

c_n — współczynniki

a — środek szeregu

x — zmienna

2 Gdy $a = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

To szereg potęgowy
rozwinięty wokół zera.

3 Co się zmienia względem zwykłego szeregu liczbowego?

- Dla szeregu liczbowego pytamy:
czy jest zbieżny?
- Dla szeregu potęgowego pytamy:
dla jakich wartości x jest zbieżny?

Szereg Taylora i szereg Maclaurina

Zapisz funkcję jako nieskończony wielomian zbudowany z jej pochodnych.

1 Szereg Taylora

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

2 Co oznaczają symbole?

- a — punkt rozwinięcia
- $f^{(n)}(a)$ — n -ta pochodna obliczona w punkcie a
- $n!$ — silnia
- $(x-a)^n$ — kolejne potęgi odległości od punktu rozwinięcia

3 Szereg Maclaurina

To szczególny przypadek Taylora dla $a = 0$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

4 Przykład: e^x

